

CONCEPTE DE PRIMITIVA.

Donades les funcions $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ i $F:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longrightarrow f(x)$ $x \longrightarrow F(x)$

diem que F és una **primitiva o anti-derivada** de $f \Leftrightarrow \forall x \in [a,b] \ dF = f(x) \ dx$
 $\Leftrightarrow F$ és derivable a totes les x de $[a,b]$ i $F'(x) = f(x)$.

PROPIETATS.

Siguin $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ i $F:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
 F primitiva de $f \Leftrightarrow$ per a tot $C \in \mathbb{R}$ $F+C$ és primitiva de f .

És a dir :

Si a una primitiva li sumem una constant, el resultat és una altra primitiva.

Demostració:

F primitiva de $f \Rightarrow dF = f(x) \ dx$.

Com $d(F+C) = dF + dC = dF + 0 = dF = f(x) \ dx \Rightarrow F+C$ primitiva de f .

Sigui $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

F i G són dues primitives de $f \Rightarrow F=G+C$ amb C constant.

És a dir:

Dues primitives d'una mateixa funció, són iguals excepte en una constant additiva.

Demostració:

F primitiva de $f \Rightarrow F$ derivable a $[a,b]$ i $F'(x) = f(x)$

G primitiva de $f \Rightarrow G$ derivable a $[a,b]$ i $G'(x) = f(x)$

$$F(b) - F(x)$$

Per a tot x , considerem el quocient $\frac{F(b) - F(x)}{G(b) - G(x)}$

Pel teorema de Cauchy existeix $c \in (x,b)$ de manera que

$$\frac{F(b) - F(x)}{G(b) - G(x)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{f(c)}{f(c)} = 1 \Rightarrow F(b) - F(x) = G(b) - G(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x) = G(x) + F(b) - G(b) = G(x) + C.$$

CONCEPTE D' INTEGRAL INDEFINIDA.

Per les propietats anteriors podem afirmar que donada una funció

$f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

- si a una primitiva li sumem una constant, obtenim una altra primitiva.
- si tenim dues primitives, aquestes són iguals excepte en una constant additiva.

Així doncs, el conjunt de totes les primitives de f , es pot obtenir a partir d'una primitiva concreta F , sumant-li diferents constants en la forma: $F(x) + C$.

Per aquesta raó, definim la **integral indefinida** o simplement la **integral** de la funció f , com: **el conjunt de totes les primitives de f** , i ho representem de en la forma :

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \text{on } F \text{ és una primitiva de } f.$$

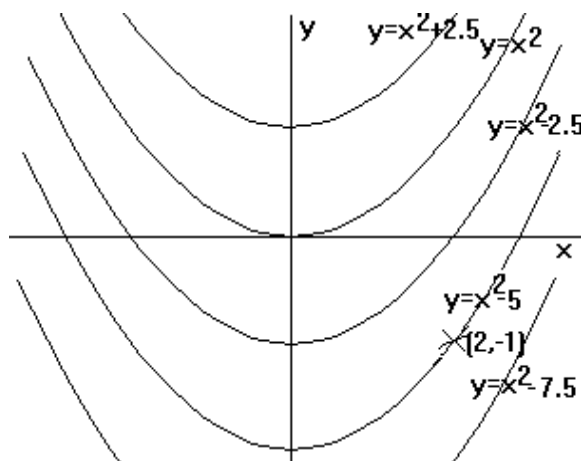
Observis que: sumar una constant C a una funció, és desplaçar verticalment el seu gràfic tantes unitats com indica la C . Així la constant d'integració ens desplaça verticalment una primitiva concreta. Per aquesta raó, ens podem plantejar d'aquesta manera els **problemes de valor inicial**, en el que se'n dona una funció i cal trobar-li una primitiva que passi per un punt concret (x_0, y_0) .

Exemple :

Donada la funció $f(x) = 2x$, trobeu la primitiva que passa per $(2, -1)$.
En primer lloc trobem totes de primitives de $f(x)$; són:

$$F(x) = \int 2x dx = x^2 + C.$$

Si passa per $(2, -1) \Rightarrow F(2) = -1$,
però $F(2) = 2^2 + C = 4 + C$.
Per tant $4 + C = -1 \Rightarrow C = -5$.
La primitiva buscada és $F(x) = x^2 - 5$.



PROPIETATS:

$$\int d F(x) = F(x) + C$$

$$\text{Ja que: Si } F'(x) = f(x) \Rightarrow d F(x) = f(x)dx \Rightarrow \int f(x)dx = \int d F(x)$$

$$\text{però, per definició, } \int f(x) dx = F(x) + C \Rightarrow \int d F(x) = F(x) + C.$$

$$d \int f(x) dx = f(x) dx$$

$$\text{Ja que: Si } F'(x) = f(x) \Rightarrow dF(x) = f(x)dx \Rightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$$

diferenciant aquesta igualtat

$$d \int f(x)dx = d(F(x) + C) = dF(x) + dC = dF(x) + 0 = f(x) dx.$$

$$\int (f + g)(x) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx .$$

És a dir:

La integral d'una suma és la suma de les integrals.

Ja que:

$$\begin{aligned} d \int (f+g)(x) dx &= (f+g)(x)dx = f(x) dx + g(x)dx = d \int f(x)dx + d \int g(x)dx = \\ &= d \left(\int f(x)dx + \int g(x)dx \right) \Rightarrow \int (f + g)(x) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx . \end{aligned}$$

$$\int k f(x)dx = k \int f(x) dx .$$

És a dir:

La integral d'una constant per una funció és la constant per la integral de la funció.

Ja que:

$$\begin{aligned} d \int k f(x)dx &= (k f(x))dx = k (f(x)dx) = k d \int f(x)dx = d \left(k \int f(x) dx \right) \Rightarrow \\ \int k f(x)dx &= k \int f(x) dx. \end{aligned}$$

TAULA D'INTEGRALS IMMEDIATES.

Com a conseqüència de la definició d'integral, per obtenir una taula d'integrals immediates, sols ens cal "girar" la taula de derivades; així podem afirmar que:

$\int (du_1 + du_2 + \dots + du_n) = \int du_1 + \int du_2 + \dots + \int du_n$	$\int kdu = k \int du$
$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{per tot } n \neq -1$	$\int u^{-1} du = \int \frac{du}{u} = \ln u + C$
$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C = a^u \log_a e + C$	$\int e^u du = e^u + C$
$\int \sin u du = -\cos u + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$
$\int \sec^2 u du = \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$	$\int \operatorname{cosec}^2 u du = \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$
$\int \sec u \operatorname{tg} u du = \sec u + C$	$\int \operatorname{cosec} u \operatorname{ctg} u du = -\operatorname{cosec} u + C$
$\int \operatorname{tg} u du = \ln \sec u + C = -\ln \cos u + C$	$\int \operatorname{ctg} u du = \ln \sin u + C$
$\int \sec u du = \ln \sec u + \operatorname{tg} u + C$	$\int \operatorname{cosec} u du = \ln \operatorname{cosec} u - \operatorname{ctg} u + C = \ln \operatorname{tg} u / 2 + C$
$\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} u + C$	$\int \frac{-du}{1+u^2} = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} u + C$
$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arc} \sin u + C$	$\int \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arc} \cos u + C$
$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \operatorname{arc} \sec u + C$	$\int \frac{-du}{u\sqrt{u^2-1}} = \operatorname{arc} \operatorname{cosec} u + C$

MÈTODES D'INTEGRACIÓ.

MÈTODE DE SUBSTITUCIÓ.

El mètode de **substitució** o **canvi de variables** és, i de bon tros, el més emprat de tots, car s'utilitza pràcticament a la totalitat de les integrals no immediates. Es basa en el següent:

TEOREMA.

Si f és contínua i g és derivable amb continuïtat \Rightarrow

$$\Rightarrow \int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(t) dt \quad \text{on } g(x) = t.$$

Ja que:

Si F és una primitiva de f per la regla de la cadena, tenim:

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) g'(x) = f(g(x)) g'(x) \Rightarrow$$

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int (F \circ g)'(x) dx = (F \circ g)(x) = F(g(x)) + C.$$

Si anomenem $g(x) = t$, tenim

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + C = F(t) + C$$

I com F és primitiva de $f \Rightarrow \int f(t) dt = F(t) + C$

Per tant

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(t) dt \quad \text{on } g(x) = t$$

Exemple:

- Càlcul de $\int \frac{2 dx}{3x + 5}$

$$\text{Si fem } 3x + 5 = t \Rightarrow dt = 3dx \Rightarrow dx = 1/3 dt \Rightarrow$$

$$\int \frac{2 dx}{3x + 5} = \int \frac{2/3 dt}{t} = \frac{2}{3} \int \frac{dt}{t} = \frac{2}{3} \ln t + C = \frac{2}{3} \ln |3x + 5| + C.$$

- Càlcul de $\int \frac{\ln x}{x} dx$

$$\text{Si fem } \ln x = t \Rightarrow \frac{1}{x} dx = dt \Rightarrow$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

MÈTODE D'INTEGRACIÓ PER PARTS.

La fórmula d'integració per parts s'acostuma a utilitzar per calcular integrals de productes, logaritmes i funcions circulars inverses.

TEOREMA.

Si u i v són dues funcions derivables amb derivada contínua

$$\Rightarrow \int u \, dv = u v - \int v \, du .$$

Ja que:

Si considerem la diferencial d'un producte $d(u v) = u \, dv + v \, du$

$$\Rightarrow u \, dv = d(u v) - v \, du .$$

Integrant els dos membre de la igualtat

$$\int u \, dv = \int (d(uv) - v \, du) = \int d(uv) - \int v \, du = u v - \int v \, du .$$

Exemples:

- Càlcul de $\int x \sin x \, dx$
Prenent

$$dv = \sin x \, dx \Rightarrow v = \int dv = \int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$\text{substituint: } \int x \sin x \, dx = -x \cos x - \int -\cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C .$$

- Càlcul de $\int \text{arc tg } x \, dx .$

Prenent

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\text{i } u = \text{arc tg } x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int \text{arc tg } x \, dx = x \text{ arc tg } x - \int \frac{x \, dx}{1+x^2}$$

Calculem ara

$$\int \frac{x \, dx}{1+x^2}, \text{ fent } t=1+x^2 \Rightarrow dt=2x \, dx \Rightarrow \int \frac{x \, dx}{1+x^2} = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \ln t = \frac{\ln(1+x^2)}{2}$$

$$\text{amb el que } \int \text{arc tg } x \, dx = x \text{ arc tg } x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C .$$

ALGUNES INTEGRALS TRIGONOMÈTRIQUES.

Sovint trobem integrals on totes les funcions que hi apareixen són funcions trigonomètriques; per resoldre-les caldrà fer ús d'algunes de les fórmules de trigonometria estudiades en cursos anteriors. No veurem de forma detallada i exhaustiva tota la tipologia d'aquestes integrals, sols mostrarem alguns dels casos més interessants.

$\int \sin^m x \cos^n x dx$ amb m, n enters.

- **Si m o n imparell**

Exemple:

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \cos^2 x dx &= \int \sin^4 x \cos^2 x \sin x dx = \int (\sin^2 x)^2 \cos^2 x \sin x dx = \\ &\text{com } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x, \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \sin x dx \\ &\text{fent el canvi } \cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt, \text{ obtenim} \\ \int \sin^5 x \cos^2 x dx &= \int -(1-t^2)^2 t^2 dt = - \int (t^2 - 2t^4 + t^6) dt = \\ &= \frac{-t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} - \frac{t^7}{7} = \frac{-\cos^3 x}{3} + \frac{2\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + C. \end{aligned}$$

- **Si m i n són parells i diferents**, es redueixen els exponents aplicant les fórmules:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Exemple:

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

- **Si $m = n$ i parells**, s'acostumen a reduir els exponents utilitzant la fórmula del $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$; transformant així la integral en una del tipus anterior.

Exemple:

$$\begin{aligned} \int (\sin x \cos x)^2 dx &= \int \left(\frac{\sin 2x}{2} \right)^2 dx = \int \frac{\sin^2 2x}{4} dx = \\ &\int \frac{1 - \cos 4x}{8} dx \\ \text{i com } \sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \\ &= \int \frac{1 - \cos 4x}{8} dx = \frac{1}{8} x - \frac{\sin 4x}{32} + C. \end{aligned}$$

Les integrals en la forma:

$$\int \sin mx \cos nx \, dx, \int \sin mx \sin nx \, dx \text{ o } \int \cos mx \cos nx \, dx \text{ amb } m \neq n.$$

Recordem que: $\sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

i que: $\sin(\alpha-\beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

sumant terme a terme, obtenim $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$.

Si ara fem $\alpha = mx$ i $\beta = nx$, ens queda:

$$\int \sin mx \cos nx \, dx = \int \frac{1}{2} \left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x \right) dx.$$

que és una integral quasi-immediata.

Per a les altres dues, cal tenir en compte que: $\cos(\alpha+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

i $\cos(\alpha-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$;

sumant terme a terme obtenim $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$.

Fent $\alpha = mx$ i $\beta = nx$, ens queda:

$$\int \cos mx \cos nx \, dx = \int \frac{1}{2} \left(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x \right) dx.$$

Si en lloc de sumar, restem, obtenim: $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$.

I per tant:

$$\int \sin mx \sin nx \, dx = \int \frac{1}{2} \left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x \right) dx.$$

Exemple:

$$\begin{aligned} \int \sin 5x \sin 3x \, dx &= \int \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 8x) \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx - \frac{1}{2} \int \cos 8x \, dx = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + C. \end{aligned}$$

Integrals del tipus

$$\int \operatorname{tg}^n x \, dx \text{ o } \int \operatorname{ctg}^n x \, dx \text{ amb } n \text{ enter.}$$

Pel cas $n=1$ són immediates.

Si $n \neq 1$, com $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x \Rightarrow \sec^2 x - 1 = \operatorname{tg}^2 x$, tenim que:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^n x \, dx &= \int \operatorname{tg}^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x (\sec^2 x - 1) \, dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \sec^2 x \, dx - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx \\ &\text{realitzant el canvi } \operatorname{tg} x = t \Rightarrow dt = \sec^2 x \, dx \\ &= \int t^{n-2} \, dt - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx = \frac{1}{n-1} t^{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx. \end{aligned}$$

Aplicant aquest procediment el nombre de vegades necessari, podem resoldre l'integral.

De fet, del procediment anterior s'obté la següent fórmula recurrent:

$$\text{Si } I_k = \int \text{tg}^k x \, dx \Rightarrow I_k = \frac{1}{k-1} \text{tg}^{k-1} x - I_{k-2} .$$

Exemple:

$$\begin{aligned} \int \text{tg}^6 x \, dx &= \int \text{tg}^4 x \, \text{tg}^2 x \, dx = \int \text{tg}^4 x (\sec^2 x - 1) dx = \int \text{tg}^4 x \sec^2 x \, dx - \int \text{tg}^4 x \, dx = \\ &= \int \text{tg}^4 x \sec^2 x \, dx - \int \text{tg}^2 x \, \text{tg}^2 x \, dx = \int \text{tg}^4 x \sec^2 x \, dx - \int \text{tg}^2 x (\sec^2 x - 1) dx = \\ &= \int \text{tg}^4 x \sec^2 x \, dx - \int \text{tg}^2 x \sec^2 x \, dx + \int \text{tg}^2 x \, dx = \\ &= \int \text{tg}^4 x \sec^2 x \, dx - \int \text{tg}^2 x \sec^2 x \, dx + \int (\sec^2 x - 1) dx = \\ &= \int \text{tg}^4 x \sec^2 x \, dx - \int \text{tg}^2 x \sec^2 x \, dx + \int \sec^2 x \, dx - \int dx = \\ &\text{si ara fem } t = \text{tg } x \Rightarrow dt = \sec^2 x \, dx \\ &= \int t^4 dt - \int t^2 dt + \int dt - \int dx = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + t - x = \\ &= \frac{\text{tg}^5 x}{5} - \frac{\text{tg}^3 x}{3} + \text{tg } x - x + C . \end{aligned}$$

Integrals en la forma:

$$\int \text{tg}^m x \sec^n x \, dx \quad \text{o} \quad \int \text{ctg}^m x \csc^n x \, dx \quad \text{amb } m \text{ i } n \text{ enters.}$$

- **Si n és parell** fem $\sec^n x = \sec^{n-2} x \sec^2 x$, amb el que:
 $\sec^n x = (\sec^2 x)^{(n-2)/2} \sec^2 x = (1 + \text{tg}^2 x)^{(n-2)/2} \sec^2 x$.
 Fent el canvi $t = \text{tg } x$, podem resoldre la integral.

Exemple:

$$\begin{aligned} \int \text{tg}^3 x \sec^6 x \, dx &= \int \text{tg}^3 x \sec^4 x \sec^2 x \, dx = \int \text{tg}^3 x (\sec^2 x)^2 \sec^2 x \, dx = \\ &= \int \text{tg}^3 x (1 + \text{tg}^2 x)^2 \sec^2 x \, dx = \end{aligned}$$

$$\text{fent } \text{tg } x = t \Rightarrow dt = \sec^2 x \, dx$$

$$= \int t^3 (1 + t^2)^2 dt = \int (t^3 + 2t^5 + t^7) dt =$$

$$= \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{3} + \frac{t^8}{8} = \frac{\text{tg}^4 x}{4} + \frac{\text{tg}^6 x}{3} + \frac{\text{tg}^8 x}{8} + C .$$

- **Si n és senars**, s'acostuma a resoldre per parts o com a l'exemple:

$$\int \text{tg}^5 x \sec x \, dx = \int \text{tg}^4 x \sec x \, \text{tg } x \, dx = \int (\text{tg}^2 x)^2 \sec x \, \text{tg } x \, dx =$$

$$= \int \left(\sec^2 x - 1 \right)^2 \sec x \, \text{tg } x \, dx =$$

) ()

$$\begin{aligned}
 \text{Fent } t = \sec x &\Rightarrow dt = \sec x \operatorname{tg} x \, dx \\
 &= \int (t^2-1)^2 dt = \int (t^4-2t^2+1) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t = \\
 &= \frac{\sec^5 x}{5} - \frac{2\sec^3 x}{3} + \sec x + C.
 \end{aligned}$$

ALGUNES INTEGRALS AMB ARRELS.

Integrals amb $\sqrt{a^2 - u^2}$.

Fent el canvi $u = a \sin t$, es transformen en una integral trigonomètrica.

Exemple:

$$\int \sqrt{4 - x^2} \, dx =$$

Si fem $x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t \, dt$ i

$$\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} = 2 \sqrt{1 - \sin^2 t} = 2 \sqrt{\cos^2 t} = 2 \cos t$$

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{4 - x^2} \, dx &= \int 2 \cos t \cdot 2 \cos t \, dt = 4 \int \cos^2 t \, dt = 4 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = \\
 &= 2 \int (1 + \cos 2t) \, dt = 2t + \sin 2t = 2t + 2 \sin t \cos t =
 \end{aligned}$$

i desfent el canvi:

$$\begin{aligned}
 &= 2 \operatorname{arc} \sin \frac{x}{2} + 2 \frac{x}{2} \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2} = 2 \operatorname{arc} \sin \frac{x}{2} + \frac{x \sqrt{4 - x^2}}{2} + \\
 C.
 \end{aligned}$$

Les integrals amb $\sqrt{a^2 + u^2}$, es transformen en trigonomètriques fent $u = a \operatorname{tg} t$.

I passa el mateix amb $\sqrt{u^2 - a^2}$ quan fem $u = a \sec t$.

INTEGRALS DE FUNCIONS RACIONALS

CONSIDERACIONS PRÈVIES.

Anomenem **funció racional** a qualsevol quocient de polinomis $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

A l'hora estudiar una funció racional, sempre podem suposar que compleix les següents condicions:

- **P(x) i Q(x) no tenen cap factor comú.**
Si en tinguessin factors comuns, els podríem simplificar.

- **grau P < grau Q.**

Si grau P \geq grau Q, fent la divisió entera obtenim:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \text{polinomi quocient} + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad \text{i grau } R < \text{grau } Q.$$

Sovint afegim una tercera condició no imprescindible, però que facilita alguns càlculs. Aquesta tercera condició consisteix en suposar que el coeficient de major grau del denominador és 1.

Recordem el **principi d'identitat dels polinomis**:
dos polinomis són iguals \Leftrightarrow tenen els mateixos coeficients.

Per **fracció simple** entendrem les fraccions que tenen la forma:

$$\frac{A}{(x - \alpha)^n} \quad \text{o} \quad \frac{Ax + B}{(x^2 + \beta x + \gamma)^n}$$

on A, B són reals, n és natural i $x^2 + \beta x + \gamma$ no descompon.

El mètode que veurem, es basa en expressar la funció racional, en una suma de fraccions simples; per això ens resulta imprescindible el saber calcular la integral de les fraccions simples.

INTEGRALS DE FRACCIONS SIMPLS:

$$\int \frac{A \, dx}{x - \alpha} = A \ln |x - \alpha| + C.$$

doncs prenent $x - \alpha = u \Rightarrow du = dx$

$$\int \frac{A \, dx}{x - \alpha} = \int \frac{A \, du}{u} = A \ln |u| = A \ln |x - \alpha| + C.$$

$$\int \frac{A dx}{(x - \alpha)^r} = \frac{1}{1-r} \frac{A}{(x - \alpha)^{r-1}} + C \quad \text{amb } r \neq 1 .$$

doncs prenent $x - \alpha = u \Rightarrow du = dx$

$$\int \frac{A dx}{(x - \alpha)^r} = \int \frac{A du}{u^r} = \frac{1}{1-r} \frac{A}{u^{r-1}} = \frac{1}{1-r} \frac{A}{(x - \alpha)^{r-1}} + C .$$

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + \beta x + \gamma} dx = \text{suma d'un ln més un arc tg} .$$

on $x^2 + \beta x + \gamma$ no descomposa.

Observem que $x^2 + \beta x + \gamma = (x + \beta/2)^2 + (\gamma - \beta^2/4)$,

anomenant $p^2 = \gamma - \beta^2/4$ i $u = x + \beta/2$, la integral es transforma en:

$$\int \frac{A u du}{u^2 + p^2} + \int \frac{-A\gamma/2 + B}{u^2 + p^2} du .$$

Resolem-les per separat:

- la primera: fem $u^2 + p^2 = t \Rightarrow dt = 2 u du$

$$\int \frac{A u du}{u^2 + p^2} = \frac{A}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{A}{2} \ln |x^2 + \beta x + \gamma| .$$

- la segona: anomenem $C = -A\gamma/2 + B$, la notació és més simple, dividint numerador i denominador per p^2 i fent el canvi

$$\frac{u}{p} = t \Rightarrow dt = \frac{du}{p} ,$$

obtenim successivament:

$$\int \frac{-A\gamma/2 + B}{u^2 + p^2} du = \int \frac{C du}{u^2 + p^2} = \int \frac{C/p^2 du}{(u/p)^2 + 1} = \int \frac{C/p^2}{t^2 + 1} p dt =$$

$$= \frac{C}{p} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{C}{p} \text{arc tg } t = \frac{C}{p} \text{arc tg } \frac{u}{p} =$$

$$= \frac{-A\gamma/2 + B}{p} \text{arc tg } \frac{x + \beta/2}{p} + C \quad \text{on } p = \sqrt{\gamma - \beta^2/4} .$$

Exemple:

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) - \operatorname{arc\,tg}(x + 1) + C.$$

$$\text{Com } x^2 + 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} \Rightarrow \text{no té sol. real} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 2$ no descomposa.

Ara bé : $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$ i fent $x + 1 = u \Rightarrow dx = du$

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{x^2 + 2x + 2} &= \int \frac{u-1}{u^2 + 1} du = \int \frac{u du}{u^2 + 1} - \int \frac{du}{u^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) - \operatorname{arc\,tg} u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) - \operatorname{arc\,tg}(x+1) + C. \end{aligned}$$

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + \beta x + \gamma)^s} dx \quad \text{on } x^2 + \beta x + \gamma \text{ no descomposa.}$$

Utilitzant el procés anterior, la podem expressar com

$$\int \frac{Cu + D}{(u^2 + p^2)^s} du = \int \frac{Cu du}{(u^2 + p^2)^s} + \int \frac{D du}{(u^2 + p^2)^s}$$

La primera de les quals és una integral del tipus potencial, mentre que la segona es pot calcular mitjançant la següent fórmula de reducció:

$$\int \frac{du}{(u^2 + p^2)^s} = \frac{1}{(s-1)p^2} \left(\frac{u}{(u^2 + p^2)^{s-1}} + (2s - 3) \int \frac{du}{(u^2 + p^2)^{s-1}} \right)$$

la demostració de la qual, sobrepassa els nostres objectius .

INTEGRAL DE FUNCIONS RACIONALS.

La integral d'una funció racional sempre és una suma de funcions racionals, logaritmes i arc tg .

Donada $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ no simplificable i amb grau $P < \text{grau } Q$

descomposem el denominador en factors primers:

$$Q(x) = K (x - \alpha_1)^{r_1} \cdot \dots \cdot (x - \alpha_k)^{r_k} \cdot (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{s_1} \cdot (x^2 + \beta_2 x + \gamma_2)^{s_2} \cdot \dots$$

Distingim els 4 casos següents:

El denominador descomposa en factors de primer grau simples.

$$Q(x) = K (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_k).$$

La funció inicial s'expressa com a suma de fraccions simples, que s'obtenen associant a cada factor de primer grau $(x - \alpha_j)$ una fracció

simple amb denominador aquest factor $\frac{A_j}{x - \alpha_j}$.

$$\text{Així } \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^k \frac{A_i}{x - \alpha_i} \quad \text{amb } A_i \in \mathbb{R}.$$

Per determinar els coeficients A_i , n'hi ha prou a realitzar la suma de les fraccions simples, observar que els denominadors coincideixen i, per tant, els numeradors també seran iguals.

Apliquem després el principi d'identitat dels polinomis, o donem k valors diferents a la x , i obtindrem un sistema de k equacions amb k incògnites.

Resolent-lo, obtenim els valors de les A_i .

Un cop conegudes les A_i , la integral ens queda en la forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^k \int \frac{A_i}{x - \alpha_i} dx = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^k \int \frac{A_i}{x - \alpha_i} dx = \sum_{i=1}^k \frac{A_i \ln |x - \alpha_i|}{K} + C$$

Exemple: $\int \frac{dx}{x^2 - 1}$

El denominador descompon en $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, per tant

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}, \text{ fent la suma: } \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A(x + 1) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)}$$

Al ser els denominadors iguals, els numeradors també \Rightarrow
 $1 = A(x + 1) + B(x - 1) \Rightarrow 1 = (A + B)x + (A - B)$

Pel principi d'identitat dels polinomis, els coeficients del mateix grau són iguals

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = A - B & (\text{coef de grau } 0) \\ 0 = A + B & (\text{coef de grau } 1) \end{cases}$$

Resolent el sistema $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{-1}{2}$.

I substituint a la integral:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x + 1} = \frac{\ln|x-1|}{2} - \frac{\ln|x+1|}{2} + C$$

2. El denominador descompon en factors de primer grau algun dels quals és múltiple:

$$Q(x) = K(x - \alpha_1)^{r_1} \cdot (x - \alpha_2)^{r_2} \cdot \dots \cdot (x - \alpha_k)^{r_k}.$$

La funció inicial s'expressa com a suma de fraccions simples, que s'obtenen d'associar, a cada factor de primer grau $(x - \alpha_j)$ amb multiplicitat r_j , les r_j fraccions simples:

$$(x - \alpha_j)^{r_j} \longrightarrow \frac{A_{r_j}}{(x - \alpha_j)^{r_j}} + \frac{A_{r_j-1}}{(x - \alpha_j)^{r_j-1}} + \dots + \frac{A_0}{x - \alpha_j}$$

i així:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^k \frac{A_{r_i}}{(x - \alpha_i)^{r_i}} + \frac{A_{r_i-1}}{(x - \alpha_i)^{r_i-1}} + \dots + \frac{A_0}{x - \alpha_i}$$

Si realitzem aquesta suma, tindrem que els denominadors coincidiran, i per tant numeradors també seran iguals.

Aplicant després el principi d'identitat dels polinomis, o donant diferents valors a x , obtindrem un sistema d'equacions.

Resolent-lo, obtindrem els valors de les A_{r_j} .

I un cop conegudes les A_{ri} , la integral serà:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^k \int \left(\frac{A_{ri}}{(x-\alpha_i)^{r_i}} + \frac{A_{r_i-1}}{(x-\alpha_i)^{r_i-1}} + \dots + \frac{A_0}{x-\alpha_i} \right) dx =$$

$$= \sum \text{fraccions simples i ln} .$$

Exemple:

$$\int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} dx = -\ln|x| - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + 2 \ln|x-1| + C .$$

doncs:

$$\frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1} \Rightarrow$$

operant

$$\frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} = \frac{A(x-1)^3 + Bx + Cx(x-1) + Dx(x-1)^2}{x(x-1)^3}$$

com els denominadors són iguals \Rightarrow numeradors iguals \Rightarrow

$$x^3 + 1 = A(x-1)^3 + Bx + Cx(x-1) + Dx(x-1)^2 .$$

Donant diferents valors a la $x \Rightarrow$

$$\text{per } x = 0 \Rightarrow 1 = -A$$

$$\text{per } x = 1 \Rightarrow 2 = B$$

$$\text{per } x = 2 \Rightarrow 9 = A + 2B + 2C + 2D$$

$$\text{per } x = -1 \Rightarrow 0 = -8A - B + 2C - 4D$$

i resolent el sistema $A = -1$, $B = 2$, $C = 1$, $D = 2$.

Ens queda que:

$$\int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} dx = \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{2}{(x-1)^3} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int \frac{2}{x-1} dx =$$

$$= -\ln|x| - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + 2 \ln|x-1| + C .$$

3. El denominador descompon en factors de primer grau algun dels quals és múltiple i en factors simples de segon grau:

$$Q(x) = K(x-\alpha_1)^{r_1} \dots (x-\alpha_k)^{r_k} \cdot (x^2 + \beta_1x + \gamma_1) \dots (x^2 + \beta_mx + \gamma_m) .$$

La funció inicial s'expressa com a suma de fraccions simples, que s'obtenen d'associar a cada factor de primer grau repetit r vegades:

$$(x - \alpha_j)^{r_j} \longrightarrow \frac{A_{r_j}}{(x - \alpha_j)^{r_j}} + \frac{A_{r_j-1}}{(x - \alpha_j)^{r_j-1}} + \dots + \frac{A_0}{x - \alpha_j}$$

i a cada factor de segon grau

$$x^2 + \beta_j x + \gamma_j \longrightarrow \frac{B_j x + C_j}{x^2 + \beta_j x + \gamma_j}$$

Per tant:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{K} \left(\sum_{i=1}^k \frac{A_{r_i}}{(x - \alpha_i)^{r_i}} + \dots + \frac{A_0}{x - \alpha_i} + \sum_{i=1}^m \frac{B_i x + C_i}{x^2 + \beta_i x + \gamma_i} \right)$$

Finalment, determinarem els valors de les A_j , B_j i C_j , fent la suma i aplicant el principi d'identitat dels polinomis o donant diferents valors a les x i resolent el sistema que resulta.

Pel que hem vist de la integral de fraccions simples, sabem que:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \sum \text{frac. simples} + \text{logaritmes} + \text{arc tg}$$

4. El denominador descompon en factors de primer i segon grau amb distintes multiplicitats.

$$Q(x) = K (x - \alpha_1)^{r_1} \cdot \dots \cdot (x - \alpha_k)^{r_k} \cdot (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + \beta_m x + \gamma_m)^{s_m}$$

La funció inicial s'expressa com a suma de fraccions simples, que s'obtenen d'associar a cada factor de primer grau repetit r vegades:

$$(x - \alpha_j)^{r_j} \longrightarrow \frac{A_{r_j}}{(x - \alpha_j)^{r_j}} + \frac{A_{r_j-1}}{(x - \alpha_j)^{r_j-1}} + \dots + \frac{A_0}{x - \alpha_j}$$

i a cada factor de segon grau de multiplicitat s , les s fraccions simples:

$$x^2 + \beta x + \gamma \longrightarrow \frac{B_s x + C_s}{(x^2 + \beta x + \gamma)^s} + \frac{B_{s-1} x + C_{s-1}}{(x^2 + \beta x + \gamma)^{s-1}} + \dots + \frac{B_0 x + C_0}{x^2 + \beta x + \gamma}$$

i així la funció inicial s'expressa en la forma :

$$\frac{1}{K} \left(\sum_{i=1}^k \frac{A_{r_i}}{(x - \alpha_i)^{r_i}} + \dots + \frac{A_0}{x - \alpha_i} + \sum_{i=1}^m \frac{B_{s_i} x + C_{s_i}}{(x^2 + \beta_i x + \gamma_i)^{s_i}} + \dots + \frac{B_0 x + C_0}{x^2 + \beta_i x + \gamma_i} \right)$$

Sols ens queda fer la suma i donar valors a la x , o aplicar el principi d'identitat dels polinomis, per tal de determinar els coeficients A , B , C .

Llavors tindrem que:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \sum \text{frac. simples} + \text{logaritmes} + \text{arc tg}$$

TRIGONOMETRICO - RACIONALS.

$\int R[\sin x, \cos x] dx$ on R és funció racional de \sin i \cos .

Aquestes integrals, s'acostumen a resoldre, fent el canvi de variables $t = \tan \frac{x}{2}$.

Observem en que es transformen els diferents elements que apareixen, quan fem aquest canvi:

$$\sin x = \frac{2 \sin x/2 \cos x/2}{\cos^2 x/2} = \frac{2 \tan x/2}{1 + \tan^2 x/2} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 x/2 - \sin^2 x/2}{\cos^2 x/2} = \frac{1 - \tan^2 x/2}{1 + \tan^2 x/2} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\text{i per ser } x = 2 \arctan t \Rightarrow dx = \frac{2 dt}{1 + t^2}$$

Amb el que, quan substituïm, la integral es transforma en:

$$\int R[\sin x, \cos x] dx = \int R \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \frac{2dt}{1+t^2}$$

que és una integral racional.

Exemple:

$$\int \operatorname{cosec} x dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2dt}{2t}$$

$$\text{Si fem } t = \operatorname{tg} x/2 \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{i} \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2 dt}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{1+t^2}{t} dt = \int \left(\frac{1}{t} + t \right) dt = \ln |t| + \frac{t^2}{2} + C = \ln |\operatorname{tg} x/2| + C$$

En alguns casos particulars es poden fer canvis mes senzills

per $\int R[\sin x] \cos x dx$, podem fer el canvi $\sin x = t$

per $\int R[\cos x] \sin x dx$, fem $\cos x = t$

i per $\int R[\operatorname{tg} x] dx$ o $\int R[\sin^2 x, \cos^2 x] dx$ fem $\operatorname{tg} x = t$.

INTEGRALS QUE TENEN SUMES DE $\sqrt[n]{x}$.

Quan a una integral es té una suma d'arrels de la variable, sota diferents índexs, s'acostuma a realitzar el següent canvi de variables:

$x = t^k$ on k és el mínim comú múltiple dels índexs de les arrels.

Exemple:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}} &= \int \frac{6t^5 dt}{t^2 + t^3} = 6 \int \frac{t^3}{1+t} dt = 6 \int (t^2 - t + 1) dt - 6 \int \frac{dt}{1+t} = \\ &= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln |1+t| = 2\sqrt[6]{x^3} - 3\sqrt[6]{x^2} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln |1+\sqrt[6]{x}| = \\ &= 2\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln |1+\sqrt[6]{x}| + C. \end{aligned}$$