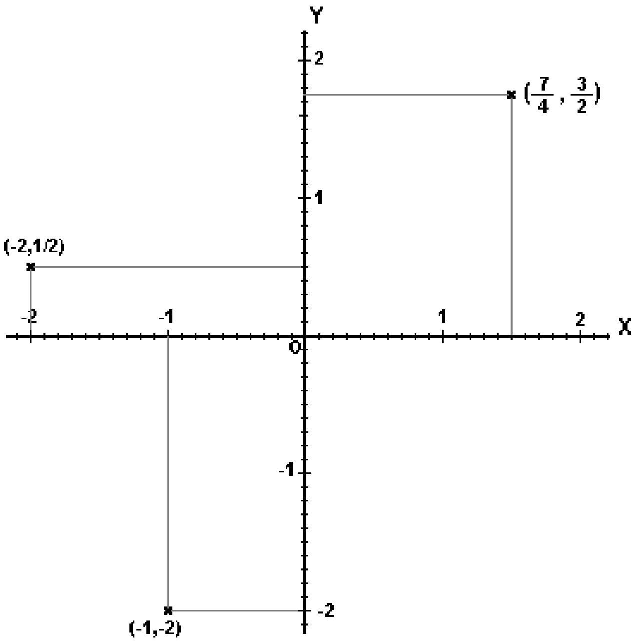


Els cursos anteriors hem après a utilitzar els uns eixos de coordenades. Ens referíem a cada punt amb dos nombres reals fet que ens permetia identificar el pla amb $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ o més simplement amb $\mathbf{R}^2$.

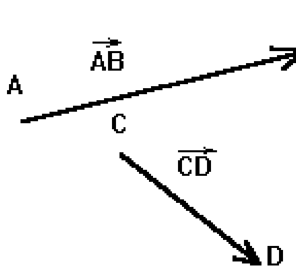
Aquest any introduirem la idea de vector lliure, i les seves principals propietats.
Començarem a parlar de l'estructura d'espai vectorial, d'alguns dels seus conceptes i el vocabulari i tècniques de manipulació que s'utilitzen.

Com sempre sols obrirem algun forat a la paret, que ens deixi veure part de la riquesa del mon que s'amaga al darrera la tanca.

VECTORS LLIURES DEL PLA

CONCEPTE DE VECTOR FIX.

Si tenim A i B, dos punts del pla, del segment orientat que va del punt A al punt B, en diem **vector fix de A a B** i acostumem a representar-lo amb el símbol $\overrightarrow{AB}$.



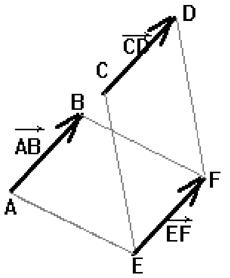
El punt A rep el nom d'**origen** del vector i del punt B en diem l'**extrem** .

La longitud del segment $\overrightarrow{AB}$ és el **mòdul**.
La **direcció** del vector, és la de les rectes paral·leles a la que passa per A i B ; i el **sentit** és el que va de l'origen a l'extrem.

EQUIPOL·LÈNCIA DE VECTORS FIXOS

Si tenim $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ vectors fixos del pla, diem que:
$\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ són **equipol·lents** $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$ $\Leftrightarrow$ es compleix alguna de les condicions següents:

- La figura ABDC és un paral·lelogram.
- A=B i C=D ($\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ són **vectors nuls**).
- Existeix un tercer vector fix $\overrightarrow{EF}$, de manera que ABFE i CDFE són dos paral·lelograms.



No és massa complex comprovar que aquesta relació verifica que:

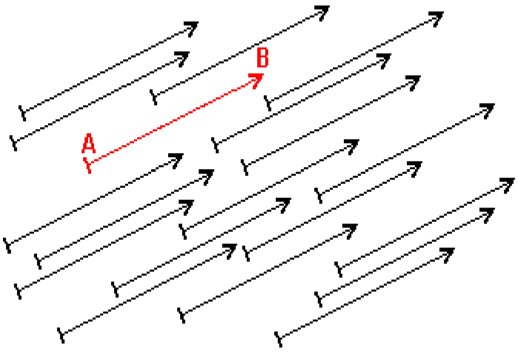
- Tot vector és equipol·lent a ell mateix.
  $\forall \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{AB}$ (≡ és **reflexiva**)

- Si un vector és equipol·lent a un altre, aquest és equipol·lent al primer.
  $\forall\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ vectors fixos $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{AB}$ (≡ és **simètrica**)

- Si un vector és equipol·lent a un segon, aquest és equipol·lent a un tercer, llavors el primer és equipol·lent al tercer.
  $\forall\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}$ vectors fixos
  $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{EF}$ (≡ és **transitiva**)

D'una relació que compleix aquestes tres propietats, se'n diu relació d'equivalència.

Observeu que, com a conseqüència de les tres propietats anteriors, si tenim un vector fix $\overrightarrow{AB}$, podem considerar tots els vectors fixos equipol·lents amb ell i considerar el que se'n diu una **classe** d'equivalència.



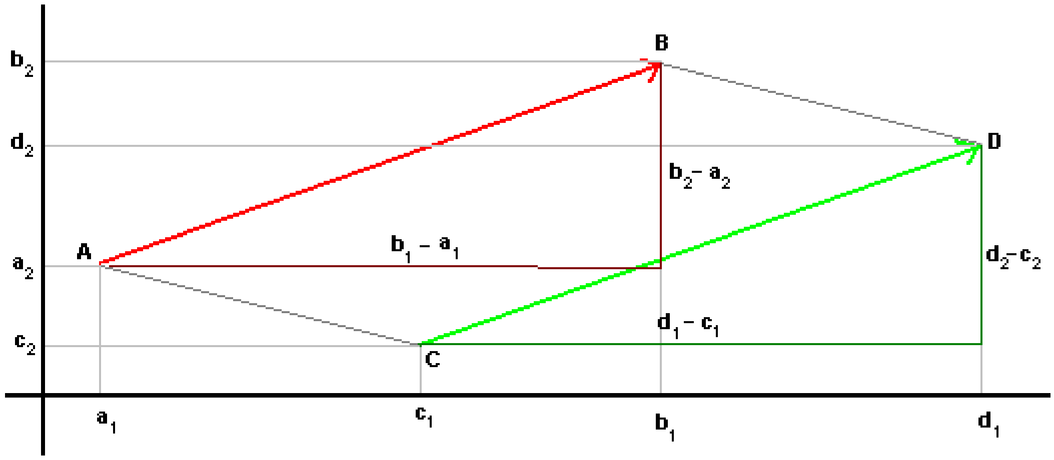
classe $\overrightarrow{AB}$ = [$\overrightarrow{AB}$]={ $\overrightarrow{XY}$ equipol·lent a $\overrightarrow{AB}$ }

I és evident que:

- Qualsevol vector fix és d'alguna classe.
- Si tenim dues classes diferents, no hi ha cap vector que sigui de les dues.
- I que qualsevol vector de la classe, ens serveix per referir-nos a la classe.

Un altra observació que podem fer és que:→
Si tenim uns eixos de coordenades i en aquests eixos A=(a_1,a_2), B=(b_1,b_2), C=(c_1,c_2) i D=(d_1,d_2) llavors

$$\overrightarrow{AB} \text{ i } \overrightarrow{CD} \textbf{ equipol·lents} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \\ \text{i} \\ b_2 - a_2 = d_2 - c_2 \end{cases}.$$



Aquest fet és el que, a la practica, ens permet manipular els vectors amb comoditat.

ELS VECTORS LLIURES DEL PLA

Al ser ≡ una relació d'equivalència, podem considerar les classes d'equivalència, formades per tots els vectors que són equipol·lents entre ells:

$$\text{classe } \overrightarrow{AB} = [\overrightarrow{AB}] = \{ \overrightarrow{XY} \text{ equipol·lent a } \overrightarrow{AB} \}$$

De cada una d'aquestes classes d'equivalència, en diem **vector lliure** i l'acostumem a representar com $\vec{v}$.

El conjunt de tots els vectors lliures del pla, representem com a $\boldsymbol{V}^2$.

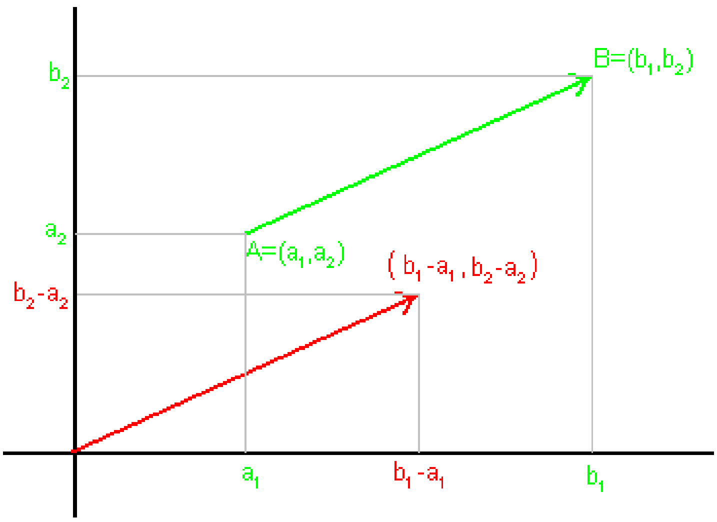
Observeu que:

- Per referir-nos a $\vec{v}$ ho podem fer amb qualsevol dels vectors fixos de la classe d'equipol·lència de $\overrightarrow{AB}$.
- Fixat un punt P, per qualsevol vector lliure $\vec{v}$ que considerem , sempre podem trobar un altre punt Q de manera que $\vec{v} = [\overrightarrow{PQ}]$.
- Donats $\vec{v} = [\overrightarrow{AB}]$ i $\vec{u} = [\overrightarrow{CD}]$

  $$\vec{v} = \vec{u} \Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{CD}] \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \ .$$
- Si tenim uns eixos de coordenades i $A=(a_1,a_2)$, $B=(b_1,b_2)$, $C=(c_1,c_2)$, $D=(d_1,d_2) \Rightarrow$ $[\overrightarrow{AB}]=[\overrightarrow{CD}] \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (b_1- a_1 , b_2 - a_2) =(d_1- c_1 , d_2 - c_2)$.

  Per això, si tenim fixats un eixos de coordenades, ens podem referir a un vector lliure $\vec{v} =[\overrightarrow{AB}] = (b_1- a_1 , b_2 - a_2)$ amb un parell ordenat de nombre reals, que en diem les **components** del vector $\vec{v}$.

  L'ús de components, ens permet tractar els vectors lliures del pla com $\mathbb{R}^2$.



De fet, quan tenim un vector lliure $\vec{v} =[\overrightarrow{AB}]$, les seves components $(b_1- a_1 , b_2 - a_2)$, són les coordenades de l'extrem d'un vector equipol·lent a $\overrightarrow{AB}$,que tingui l'origen en el punt (0,0).

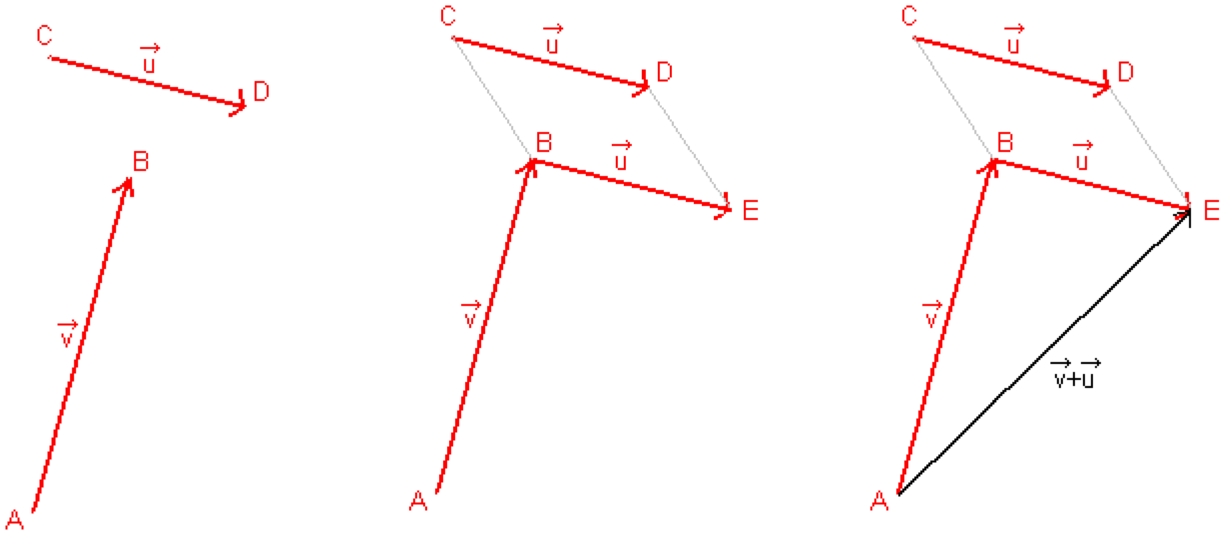
SUMA DE VECTORS LLIURES

Si $\vec{v}$ = [$\overrightarrow{AB}$] i $\vec{u}$ = [$\overrightarrow{CD}$] dos vectors lliures del pla, definim la suma $\vec{v}$ + $\vec{u}$, en la forma: trobem un vector fix de la classe de $\vec{u}$, que tingui per origen l'extrem del representant de la classe $\vec{v}$, en aquest cas el punt B, i tindrem que $\vec{u}$ = [$\overrightarrow{BE}$].

Llavors definim la suma $\vec{v} + \vec{u}$ = [$\overrightarrow{AB}$]+[$\overrightarrow{CD}$]=[$\overrightarrow{AB}$]+[$\overrightarrow{BE}$] = [$\overrightarrow{AE}$] .

Exemple:

Donats $\vec{v}$ =[$\overrightarrow{AB}$] i $\vec{u}$ =[$\overrightarrow{CD}$]   trobem E de manera que $\vec{u}$ =[$\overrightarrow{BE}$]   i fem $\vec{v}+\vec{u}$ =[$\overrightarrow{AE}$]



A nivell de components si $\vec{v} = (v_1, v_2)$ i $\vec{u} = (u_1, u_2)$ $\Rightarrow \vec{v} + \vec{u} = (v_1 + u_1, v_2 + u_2)$.

Exemple:

$\vec{u}$ =(3,-4) i $\vec{v}$ =(1,6) $\Rightarrow \vec{u} + \vec{v}$ = (3,-4) + (1,6) =(3+1,-4+6) = (4,2).

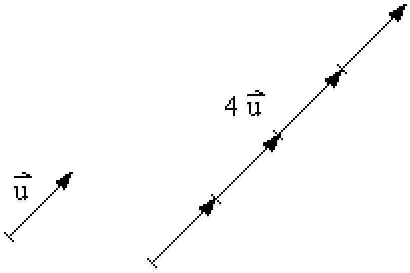
Si ho expressem en components, és fàcil veure que els vectors lliures del pla amb la suma compleixen les propietats:

- **Associativa**: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$.
  $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ = $(u_1,u_2) + ((v_1,v_2) + (w_1,w_2)) = (u_1,u_2) + (v_1+w_1,v_2+w_2) =$
  $= (u_1+(v_1+w_1), u_2+(v_2+w_2))$ (1)
  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ = $(\,(u_1,u_2) + (v_1,v_2)\,) + (w_1,w_2) = (u_1+v_1,u_2+v_2) + (w_1,w_2) =$
  $= ((u_1+v_1)+w_1), (u_2+v_2)+w_2))$ (2)
  i com la suma de real és associativa, les expressions (1) i (2) són iguals.
- **Commutativa**: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
  $\vec{u} + \vec{v} = (u_1,u_2)+(v_1,v_2)=(u_1+v_1,u_2+v_2)=(v_1+u_1,v_2+u_2)=(v_1,v_2)+(u_1,u_2)= \vec{v} + \vec{u}$.
- **Existeix element neutre**: $\vec{0} = (0,0)$ = [$\overrightarrow{AA}$].
- **Existeix element oposat**: $\vec{v} = (v_1, v_2)$ = [$\overrightarrow{AB}$] $\Rightarrow -\vec{v} = (-v_1, -v_2)$ = [$\overrightarrow{BA}$].

Amb el que els vectors lliures del pla amb la suma, són un **grup abelià**.

PRODUCTE PER ESCALARS.

Donat $\vec{u}$ un vector lliure del pla, per definir el producte del vector $\vec{u}$ per un nombre aprofitem el concepte de suma i fem: $\lambda\cdot\vec{u} = \vec{u} + ... + \vec{u}$ = sumar λ vegades $\vec{u}$.



A nivell de components: si $\vec{u} = (u_1, u_2)$ i $\lambda\in$ **R** $\Rightarrow$ $l\cdot\vec{u} = (l\cdot u_1, l\cdot u_2)$.

Exemple $\vec{u} = (\sqrt{2}, -3)$, $l = \sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $\sqrt{2}\cdot\vec{u} = \cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}, -3) = (2, -3\sqrt{2})$

PROPIETATS

El conjunt dels vectors lliures del pla, amb aquest producte per escalars, compleixen les següents propietats:

- **Distributiva respecte la suma de vectors:**

  $\boldsymbol{\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}}$

  doncs:

  $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda((u_1,u_2)+(v_1,v_2)) = \lambda(u_1+v_1,u_2+v_2) = (\lambda(u_1+v_1),\lambda(u_2+v_2)) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$

- **Distributiva respecte la suma de reals:**

  $\boldsymbol{(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}}$

  doncs:

  $(\lambda+\mu)\vec{u} = (\lambda+\mu)(u_1,u_2) = ((\lambda+\mu)u_1,(\lambda+\mu)u_2) = (\lambda u_1+\mu u_1,\lambda u_2+\mu u_2) =$

  $= (\lambda u_1,\lambda u_2) + (\mu u_1,\mu u_2) = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$

- **Associativitat mixta:**

  $\boldsymbol{\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}}$

  doncs:

  $\lambda(\mu\vec{u}) = \lambda(\mu(u_1,u_2)) = \lambda(\mu u_1,\mu u_2) = (\lambda(\mu u_1),\lambda(\mu u_2)) = ((\lambda\mu)u_1,(\lambda\mu)u_2) = (\lambda\mu)\vec{u}$

- $\boldsymbol{1\,\vec{u} = \vec{u}}$

ESPAIS VECTORIALS

CONCEPTE.

Anomenem **R**-espai vectorial a l'estructura formada per un conjunt $E \neq \emptyset$ i el cos dels reals **R**, de manera que:

(E,+) és un grup abelià i existeix una operació
$$\mathbf{R} \times E \longrightarrow E$$
$$(\lambda, \vec{v}) \longrightarrow \lambda\vec{v}$$

que compleix les següents és propietats:

[e1]	$\lambda,\mu \in \mathbf{R}$ i $\vec{v} \in E$	$(\lambda+\mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$
[e2]	$\lambda \in \mathbf{R}$ i $\vec{v}, \vec{w} \in E$	$\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$
[e3]	$\lambda,\mu \in \mathbf{R}$ i $\vec{v} \in E$	$\lambda(\mu(\vec{v})) = (\lambda\mu)\vec{v}$
[e4]	$\vec{v} \in E$	$1\vec{v} = \vec{v}$

Els elements de E se'n diuen vectors i els de **R** escalars; per això aquesta operació en diem **producte per escalars**.
Exemples:

- El conjunt **R** és un |espai vectorial.
- El conjunt **R** dels nombres complexos és un **R** espai vectorial.
- El conjunt dels polinomis amb coeficients reals de grau $\leq$ n és un **R** espai vectorial.
- El conjunt de vectors lliures del pla és **R** espai vectorial.

PROPIETATS IMMEDIATES:

Si (E,+) és un **R-**espai vectorial es compleix que:

- $\mathbf{0}\vec{v} = \vec{0}$.
  Ja que $0\vec{v} = (0+0)\vec{v} = 0\vec{v} + 0\vec{v} \Rightarrow 0\vec{v} = \vec{0}$.
- $\lambda\vec{0} = \vec{0}$.
  Ja que $\lambda\vec{0} = \lambda(\vec{0}+\vec{0}) = \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0} \Rightarrow \lambda\vec{0} = \vec{0}$.
- $\lambda\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mathbf{0}$ **o** $\vec{v} = \vec{0}$.
  Ja que si $\lambda=0$ està demostrada la propietat
  si $\lambda\neq 0 \Rightarrow$ existeix $1/\lambda \in \mathbf{R}$, operant per $1/\lambda$
  $1/\lambda(\lambda\vec{v}) = 1/\lambda\ \vec{0} \Rightarrow (1/\lambda)\lambda\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow 1\ \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$.
- $(\mathbf{-1})\vec{v} = -\vec{v}$.
  Ja que $\vec{v} + (-1)\vec{v} = (1-1)\vec{v} = 0\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow$ l'oposat de $\vec{v}$ és $(-1)\vec{v}$.
- $\lambda\vec{w} = \lambda\vec{v}$ **i** $\lambda \neq \mathbf{0} \Rightarrow \vec{w} = \vec{v}$.
  Ja que si $\lambda \neq 0 \Rightarrow$ existeix $1/\lambda \in$ **R** i per tant
  $\vec{w} = ((1/\lambda)\ \lambda)\vec{w} = 1/\lambda(\lambda\vec{w}) = 1/\lambda(\lambda\vec{v}) = ((1/\lambda)\ \lambda)\vec{v} = \vec{v}$.
- $\lambda\dot{v} = \mu\vec{v}$ **i** $\vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu$.
  Ja que $\lambda\vec{v} = \mu\vec{v} \Rightarrow \lambda\vec{v} - \mu\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow (\lambda-\mu)\vec{v} = \vec{0}$ i
  per hipòtesi $\vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow \lambda - \mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu$.

COMBINACIÓ LINEAL

Sigui (E,+) un **R**-espai vectorial i $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$,..., $\vec{v}_n$ $\in$ E i $\vec{u} \in$ E ,diem que

$\vec{u}$ **és combinació lineal de** $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$,..., $\vec{v}_n$ $\Leftrightarrow$ **existeixen $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n \in$ | de manera que**

$$\vec{u} = l_1\vec{v}_1 + l_2\vec{v}_2 + ... + l_n\vec{v}_n = \sum_{i=1}^{n} l_i\vec{v}_i$$

Exemples:

- A $\mathbf{R}^2$ el vector (4,2) és combinació lineal de (1,-1) i (2,4)
  doncs: (4,2) = 2·(1,-1) + 1·(2,4) .
- A el vector $\vec{0}$ sempre és combinació lineal de qualsevol conjunt de vectors no buit, doncs: $\vec{0} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + ... + 0\vec{v}_n$.

INDEPENDÈNCIA LINEAL-DEPENDÈNCIA LINEAL

Si (E,+) és un **R-**esp vect i S={ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ } conjunt de vectors de E , diem que:

S és un conjunt de vectors linealment independents o lliures, o més simplement, que $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ són linealment independents $\Leftrightarrow$ per que una combinació lineal amb aquests vectors sigui $\vec{0}$, tots els escalars han de ser zero .

És a dir:

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ **són linealment independents** $\Leftrightarrow$

$$\left[\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + .. + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}\right] \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, .., \lambda_n = 0$$

S és un conjunt de vectors linealment dependents o lligats o que $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ són linealment dependents $\Leftrightarrow$ existeixen $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ no tots nuls de manera que $l_1\vec{v}_1 + l_2\vec{v}_2 + ... + l_n\vec{v}_n = \vec{0}$.

Observeu que un sistema de vectors és linealment dependent $\Leftrightarrow$ no són linealment independents.

Exemples

- Volem veure la dependència o independència lineal dels vectors $\vec{u} = (2,6)$ i $\vec{v} = (-1,3)$.

  Plantegem una combinació lineal d'aquests vectors que doni $\vec{0}$.

  $l\vec{u} + m\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow l(2,6) + m(-1,3) = (0,0) \Rightarrow \lambda(2,6)+\mu(-1,3)=(0,0) \Rightarrow$

  $(2\lambda , 6\lambda)+(-\mu,3\mu)=(0,0) \Rightarrow (2\lambda-\mu,6\lambda+3\mu)=(0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2l - 3m = 0 \\ 6l + 3m = 0 \end{cases}$

  resolem el sistema

  Deixant la primera equació igual i a la segona equació li restem tres vegades la primera:

$$\begin{cases}2l-3m=0\\0+12m=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2l-3m=0\\m=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2l-0=0\\m=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}l=0\\m=0\end{cases}.$$

Per tant els escalars estan obligats a ser 0; es tracta doncs de vectors LI.

- Volem veure la dependència o independència lineal dels vectors $\vec{u}=(2,6)$ i $\vec{v}=(1,3)$.

  Plantegem una combinació lineal d'aquests vectors que doni $\vec{0}$.

  $l\vec{u}+m\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow l(2,6)+m(1,3)=(0,0)$ $\Rightarrow \lambda(2,6)+\mu(1,3)=(0,0)\Rightarrow$

  $(2\lambda, 6\lambda)+(\mu,3\mu)=(0,0)$ $\Rightarrow$ $(2\lambda+\mu,6\lambda+3\mu)=(0,0)\Rightarrow\begin{cases}2l+m=0\\6l+3m=0\end{cases}$

  resolem el sistema

  Deixem la primera equació igual i a la segona li retem tres cops la primera:

  $$\begin{cases}2l+3m=0\\0+0=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2l=-3m\\0=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}l=\dfrac{-3}{2}m\\0=0\end{cases}$$

  Observem que per $\mu=2\neq0$ i $\lambda=-3$, tenim que $-3(2,6)+2(1,3)=(0,0)$.
  i no tots els escalars són 0; es tracta doncs de vectors LD.

PROPIETATS.

S={$\vec{v}_1, \vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n$} conjunt de vectors de E, $\mathbb{R}$-espai vectorial

S és Linealment Dependent $\Leftrightarrow$ existeix $\vec{v}_i\in$ S tal que $\vec{v}_i$ és combinació lineal dels altres vectors del conjunt S.

Demostració:

$\Leftarrow$ Sense perdre generalitat, podem suposar que aquest $\vec{v}_i$ és el que ocupa el primer lloc, si no és així reordenant el conjunt aconseguim que sigui el primer .

Per tant $\vec{v}_1=\lambda_2\vec{v}_2+\lambda_3\vec{v}_3+\ldots+\lambda_n\vec{v}_n$;

si ho passem tot al mateix membre,

$\vec{0}=1\vec{v}_1-\lambda_2\vec{v}_2-\lambda_3\vec{v}_3-\ldots-\lambda_n\vec{v}_n\Rightarrow$

i obtenim una combinació lineal que dóna $\vec{0}$, i on no tots els escalars són 0

$\Rightarrow$ el sistema és LD.

$\Rightarrow$ Si el sistema és LD $\Rightarrow$ existeixen $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n\in\mathbb{R}$, no tots nuls, de manera que $\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\ldots+\lambda_n\vec{v}_n=\vec{0}$ **(1)**

Sense perdre generalitat, podem suposar que la $\lambda\neq0$ és la λ_1, si no fos així reordenant el sistema ho aconseguiríem.

Per tant $\lambda_1\neq0\Rightarrow$ existeix $1/\lambda_1\in\mathbb{R}$.

Si multipliquem escalarment l'equació (1) per $1/\lambda_1$ tenim que

$$\lambda_1 1/\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2 1/\lambda_1\vec{v}_2+\ldots+\lambda_n 1/\lambda_1\vec{v}_n=\vec{0}\Rightarrow$$

$$1\vec{v}_1+\lambda_2/\lambda_1\vec{v}_2+\ldots+\lambda_n/\lambda_1\vec{v}_n=\vec{0},$$

i isolant $\vec{v}_1$ obtenim:

$$\vec{v}_1=-\lambda_2/\lambda_1\vec{v}_2-\ldots-\lambda_n/\lambda_1\vec{v}_n\ .$$

Amb el que $\vec{v}_1$ és combinació lineal dels altres vectors del sistema.

Com a conseqüència d'aquesta propietat, podem afirmar que:
Tot conjunt de vectors que contingui el $\vec{0}$ és L D .

Doncs el $\vec{0}$ sempre és combinació lineal de qualsevol sistema, amb el que, sempre hi ha un vector combinació lineal dels altres vectors del sistema.

Si S_1 i S_2 són dos conjunts de vectors i $S_1 \subset S_2$ S_1 és LD $\Rightarrow$ S_2 és LD .

Si S_1 i S_2 són dos conjunt sde vectors i $S_2 \subset S_1$ S_1 és L I $\Rightarrow$ S_2 és LI .

GENERADORS

Donat (E,+) un $\mathbf{R}$ -espai vectorial
Diem que S={ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$} és un conjunt de generadors de E
$\Leftrightarrow$ tot vector de E es pot expressar com a combinació lineal dels elements de S.
$\Leftrightarrow$ $\forall\ \vec{u} \in$ E $\exists\ \lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n \in \mathbf{R}$ de manera que $\vec{u} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + .. + \lambda_n\vec{v}_n$.

Exemples:

- A $\mathbf{R}^2$ els vectors $\vec{v}_1$=(1,1) i $\vec{v}_2$=(2,0) són generadors de $\mathbf{R}^2$.
  ja que: si $\vec{u}$=(a,,b) és un vector de $\mathbf{R}^2$,ens qüestionem si existeixen λ i μ de manera que $\vec{u} = \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2$.
  Si per qualsevol (a b) sempre existeixen λ i μ, tindrem que $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ seran generadors. per això ens plantegem $\vec{u} = \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \Rightarrow$

  $$\vec{u} = \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \Rightarrow (a,b)=\lambda(1,1)+\mu(2,0) \Rightarrow$$
  $$(a,b)=(\lambda,\lambda)+(2\mu,0) \Rightarrow (a,b)=(\lambda+2\mu,\lambda) \Rightarrow$$
  $$\begin{cases} a = l + 2m \\ b = l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a-l}{2} = m \\ b = l \end{cases}$$

  Amb el que sigui quin sigui el vector $\vec{u}$=(a,b), sempre existeixen els escalars que l'expressen com a combinació lineal de $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$.
  Per tant $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ són generadors de $\mathbf{R}^2$.

- A $\mathbf{R}^2$ els vectors $\vec{v}_1$=(1,1) i $\vec{v}_2$=(2,2) no són generadors de $\mathbf{R}^2$.
  ja que si plantegem

  $$\vec{u} = \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \Rightarrow (a,b)=\lambda(1,1)+\mu(2,2) \Rightarrow$$
  $$(a,b)=(\lambda,\lambda)+(2\mu,2\mu) \Rightarrow (a, b)=(\lambda+2\mu,\lambda+2\mu) \Rightarrow$$
  $$\begin{cases} a = l + 2m \\ b = l + 2m \end{cases} \Rightarrow \text{ a=b.}$$

  I per tant, sols es poden expressar com a combinació lineal de $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ aquell vectors $\vec{u}$=(a,b) que tenen iguals les dues components.
  Per tant $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ no són generadors de $\mathbf{R}^2$.

BASE I DIMENSIÓ - COMPONENTS D'UN VECTOR .

Donat (E,+) espai vectorial i B ={$\vec{e}_1, \vec{e}_2$} un conjunt de vectors de E diem que:

$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ són una base de E $\Leftrightarrow$ $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ són linealment independents i generadors de E .

Anomenem **dimensió d'un espai vectorial E, al número de vectors que té una base.**
El teorema de Steinitz, ens garanteix que totes les bases d'un espai vectorial, tenen sempre el mateix número de vectors. Per tant la dimensió d'un espai vectorial no depèn de la base escollida.
Exemple:

Els vectors $\vec{v}_1$=(-1,2) i $\vec{v}_2$=(1,1) són base de $\mathbf{R}^2$.

- Son LI :

  Plantegem una combinació lineal que doni $\vec{0}$

  $\lambda(-1,2) + \mu(1,1) = (0,0)$

  operant:

  $$\Rightarrow (-\lambda+\mu,\ 2\lambda+\mu)=(0,0) \Rightarrow \begin{cases} -l+m=0 \\ 2l+m=0 \end{cases}$$

  si a la segona equació li restem la primera $\begin{cases} -l+m=0 \\ 3l=0 \end{cases} \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow \mu=0.$

  Per tant són LI.

- Són generadors:

  Si $\vec{u}$=(a,b) és un vectors qualsevol de $\mathbf{R}^2$ plantegen una combinació lineal de $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$, que doni $\vec{u}$:

  $(a,b) = \lambda(-1,2) + \mu(1,1)$

  operant

  $$(a,b)=(-\lambda+\mu,\ 2\lambda+\mu) \Rightarrow \begin{cases} a=-l+m \\ b=2l+m \end{cases}$$

  si a la segona equació li restem la primera $\begin{cases} a=-l+m \\ b-a=3l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-l+m \\ \dfrac{b-a}{3}=l \end{cases} \Rightarrow$

  $$\begin{cases} a=-l+m \\ \dfrac{b-a}{3}=l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b-a}{3}=m \\ \dfrac{b-a}{3}=l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2a+b}{3}=m \\ \dfrac{b-a}{3}=l \end{cases}.$$

  Per tant són generadors.

Com són linealment independents i generadors $\Rightarrow$ $\vec{v}_1$=(-1,2) i $\vec{v}_2$=(1,1) són base.

COMPONENTS D'UN VECTOR EN UNA BASE

Si $\vec{e}_1 \vec{e}_2$ és una base de E $\Rightarrow$ tot vector $\vec{v} \in$ E, es pot expressar de forma **única** com combinació lineal d'aquesta base.
És a dir:

$\vec{e}_1 \vec{e}_2$ **són base** $\Rightarrow \forall\ \vec{v} \in$ **E** $\quad \exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in$ **R úniques de manera que** $\vec{v} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$.

Aquestes úniques λ_1, λ_2 associades al vector $\vec{v}$, són les **components del vector** $\vec{v}$ en la base $\vec{e}_1 \vec{e}_2$ i ho representem per $\vec{v} = (\lambda_1, \lambda_2)$.
Ja que:
Considerem $\vec{v} \in$ E.
Per ser les $\vec{e}_i$ base $\Rightarrow$ són generadors i per tant

existeixen λ_1 , λ_2 de manera que $\quad \vec{v} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 \quad$ (1).

Si aquesta representació no fos única llavors podríem fer

$$\vec{v} = \mu_1 \vec{e}_1 + \mu_2 \vec{e}_2 \qquad (2)$$

restant terme a terme l'equació (2) de la (1) obtenim :

$$\vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = (\lambda_1 - \mu_1)\, \vec{e}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\, \vec{e}_2$$

que és una combinació lineal de les $\vec{e}_i$, que dona $\vec{0}$.

Però les ($\vec{e}_i$) són base i per tant són L I $\Rightarrow$ tots els escalars són zero $\Rightarrow$

$(\lambda_1 - \mu_1) = 0$, $(\lambda_2 - \mu_2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2$.

amb el que , la representació de $\vec{v}$ com a combinació lineal de la base, és única.

Exemple:

A l'exemple anterior hem vist que els vectors $\vec{v}_1$=(-1,2) i $\vec{v}_2$=(1,1) són base de $|^2$; trobem ara les components del vector $\vec{u}$ =(4,1) en aquest nova base:

Plantegem (4,1) = λ(-1,2) + μ(1,1)

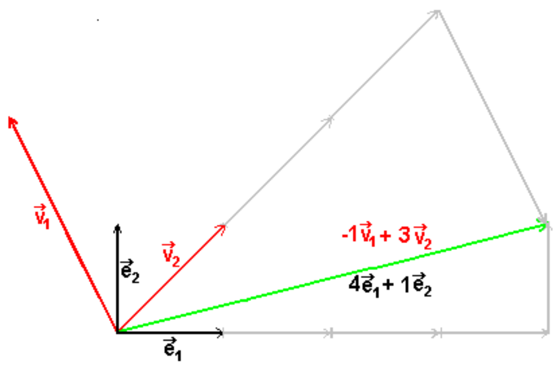
operant (4,1)=($-\lambda+\mu$, $2\lambda+\mu$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 = -l + m \\ 1 = 2l + m \end{cases} \text{ si a la segona equació li restem la primera } \Rightarrow \begin{cases} 4 = -l + m \\ 1 - 4 = 3l \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 = -l + m \\ -1 = l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 1 + m \\ -1 = l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = m \\ -1 = l \end{cases} \Rightarrow (4,1) = -1(-1,2) + 3(1,1)$$

Per tant el vector $\vec{u}$ que en la base inicial tenia les components (4,1), en la nova base té les components (-1,3).

Quan treballem amb dues bases diferents, com les components del vector depenen de la base, acostumem a indicar-la en la forma $\vec{u} = (4,1)_{(e)}$ i $\vec{u} = (3,-1)_{(v)}$.



PRODUCTE ESCALAR

DEFINICIÓ

Donat E un **R**-espai vectorial, anomenem producte escalar a qualsevol aplicació

$\cdot : E \times E \longrightarrow \mathbf{R}$ que compleix les següents propietats:

$(\vec{u}, \vec{v}) \longrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v}$

[p1] per tot $\vec{u}, \vec{v} \in E \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

[p2] per tot $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

[p3] per tot $\vec{u}, \vec{v} \in E$ i $\lambda \in |$ $\lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v}$

[p4] per tot $\vec{u} \neq \vec{0} \quad \vec{u} \cdot \vec{u} > 0$

PROPIETATS

Per tot $\vec{u} \in E \quad \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$

Ja que: $\vec{0} \cdot \vec{u} = (\vec{0} + \vec{0}) \cdot \vec{u} = \vec{0} \cdot \vec{u} + \vec{0} \cdot \vec{u} \Rightarrow \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$.

$\vec{u} \cdot \vec{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

És evident per la propietat anterior i per [p4]

Per tot $\vec{u}, \vec{v} \in E \Rightarrow (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leq (\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{v})$ (Desigualtat de Cauchy-Schartz)

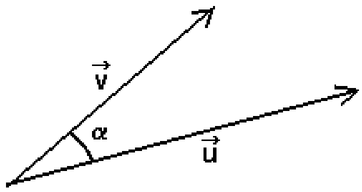
Donats $\vec{u}$ i $\vec{v} \in E$, considerem $\vec{u} + \lambda \vec{v} \Rightarrow (\vec{u} + \lambda \vec{v})^2 \geq 0$, hi ha dues possibilitats:

- Existeix $\lambda \in \mathbf{R}$, de manera que $\vec{u} + \lambda \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = -\lambda \vec{v}$
  $\Leftrightarrow (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = ((-\lambda \vec{v}) \cdot \vec{v})^2 = (-\lambda)^2 (\vec{v} \cdot \vec{v})(\vec{v} \cdot \vec{v}) =$
  $= ((-\lambda \vec{v}) \cdot (-\lambda \vec{v}))(\vec{v} \cdot \vec{v}) = (\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{v})$
  $\Rightarrow$ compleix la desigualtat.
- Per tot $\lambda \in \mathbf{R}$ $\vec{u} + \lambda \vec{v} \neq \vec{0} \Leftrightarrow$ per tot λ $(\vec{u} + \lambda \vec{v})^2 \neq 0$.
  $\Leftrightarrow$ l'equació λ $\vec{u} \cdot \vec{u} + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} \lambda + \vec{v} \cdot \vec{v} \lambda^2 = 0$ no té solució
  $\Leftrightarrow$ $b^2 - 4ac$ és $< 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow (2 \vec{u} \cdot \vec{v})^2 - 4(\vec{v} \cdot \vec{v})(\vec{u} \cdot \vec{u}) < 0 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 < (\vec{v} \cdot \vec{v})(\vec{u} \cdot \vec{u})$
  $\Rightarrow$ compleix la desigualtat.

La definició que hem donat de producte escalar, és molt abstracte i admet diferents productes escalars segons el que pretenguem; com a nosaltres ens interessa uns visió geomètrica , la versió de producte escalar que més s'ajusta als nostre interessos és

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\cos(\vec{u}, \vec{v})|$$

on $\|\vec{v}\|$ = longitud del vector $\vec{v}$



BASE ORTONORMAL

Si E és un **R**-espai vectorial i $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ una base de E, diem que:

$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ és una **base ortonormal** $\Leftrightarrow$ $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$

EXPRESSIÓ ANALÍTICA DEL PROD ESCALAR EN UNA BASE ORTONORMAL

Suposem que E = R^2 i $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ és una base ortonormal

$\vec{u}$ =(u_1,u_2) $\vec{w}$ =(w_1,w_2) dos vectors de E $\Rightarrow$ $\vec{u} \cdot \vec{w}$ = $u_1w_1 + u_2w_2$.

Ja que: $\vec{u} \cdot \vec{w} = (u_1,u_2)\cdot(w_1,w_2) = (u_1\vec{e}_1+u_2\vec{e}_2)\cdot(w_1\vec{e}_1+w_2\vec{e}_2) =$

$= u_1w_1\vec{e}_1\,\vec{e}_1 + u_2w_1\vec{e}_2\,\vec{e}_1 + u_1w_2\vec{e}_1\,\vec{e}_2 + u_2w_2\vec{e}_2\,\vec{e}_2 =$

$= u_1w_1\,1 + u_2w_1\,0 + u_1w_2\,0 + u_2w_2\,1 + = u_1w_1 + u_2w_2$

La facilitat de càlcul que donen les bases ortonormals, fa que sempre que puguem , treballem amb bases ortonormals.

NORMA

Pel fet de que $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$, sempre podem parlar de la seva arrel quadrada, és a dir, podem parlar de $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ que anomenem **norma o mòdul** del vector $\vec{u}$ i ho representem per $\|\vec{u}\|$.

Si el vector és referit a una base ortonormal, tenim que $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

VECTORS PERPENDICULARS

Donats $\vec{u}$ i $\vec{v}$ dos vectors diem que

$\vec{u}$ i $\vec{v}$ són perpendiculars o ortogonals $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \perp \vec{v}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \cdot \vec{v}$ **= 0**

I si els vectors estan referits en una base ortonormal, ho podem expressar com:

$\vec{u}$ i $\vec{v}$ perpendiculars $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \perp \vec{v}$ $\Leftrightarrow$ **$u_1v_1 + u_2v_2 = 0$**

Exemple:

Donats els vectors $\vec{u}$ =(5,-2) i $\vec{v}$ =(3,m), trobem m per tal que $\vec{u}$ i $\vec{v}$ siguin perpendiculars.

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow u_1v_1 + u_2v_2 = 0 \Leftrightarrow (5,-2)\cdot(3,m) = 0 \Leftrightarrow 5\cdot3 + (-2)\cdot m = 0 \Leftrightarrow 15 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{15}{2}$

ANGLE ENTRE VECTORS

Donats $\vec{u}$ i $\vec{v}$ dos vectors de $\mathbf{R}^2$, referits a una base ortonormal, definim l'angle entre $\vec{u}$ i $\vec{v}$ com $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$

Com sempre, si la base amb que treballem és ortonormal el càlcul és mes senzill i $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{u_1 v_1 + u_2 \cdot v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\cdot\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$

Exemple:

Trobem l'angle que formen $\vec{u}$ =(-1,1) i $\vec{v}$ =(5,0) .

$$\cos((-1,1),(5,1)) = \frac{-1\cdot 5 + 1\cdot 1}{\sqrt{(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{5^2+1^2}} = \frac{-4}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{26}} = \frac{-4}{2\cdot\sqrt{13}} = \frac{-2}{\sqrt{13}} \Rightarrow$$

$$angle(-1,1),(5,1) = \arccos\frac{-2}{\sqrt{13}} = \arccos -0{,}5547 = 2{,}1587 \ .$$

DISTANCIES

Per definir la distància a un espai vectorial, aprofitem el concepte de norma d'un vector, i així tindrem que:

Si A=(a_1, a_2) i B=(b_1, b_2) definim d(A, B) = $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Si estem treballant amb una base ortonormal d(A, B) = $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

DIVISIÓ D'UN SEGMENT. PUNT MITJA D'UN SEGMENT.

Si tenim un segment d'extrems A=(a_1,a_2) i B=(b_1,b_2) i volem dividir-lo en n parts iguals, sols ens cal determinar n+1 punts ξ_i , de manera que els vectors d'origen ξ_i i extrem ξ_{i+1} siguin tots iguals i ξ_0=A i ξ_n=B.

Per tant, $\overrightarrow{AB}$ = $\xi_0\xi_1 + \xi_1\xi_2 + ... + \xi_{n-1}\xi_n$ = n $\xi_i\xi_{i+1}$, amb el que $x_i x_{i+1} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{n}$

tindrem que: $\hat{\imath}_i = A + \dfrac{i}{n}\overrightarrow{AB}$

ξ_0 = A, $\hat{\imath}_1 = A + \dfrac{1}{n}\overrightarrow{AB}$, ..., $\hat{\imath}_n = A + \dfrac{n}{n}\overrightarrow{AB} = B$

Per a n=2, s'obté el punt mitjà entre A i B.

M = $A + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ = $(a_1, a_2) + \dfrac{1}{2}(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ i operant: $M = \left(\dfrac{a_1+b_1}{2}, \dfrac{a_2+b_2}{2}\right)$