ASÍMPTOTES.

Les asímptotes a una funció són rectes que donen una idea sobre el comportament de la funció quan les variables s'apropen a l'infinit.

Donada la corba $y= f(x)$, direm que un punt $P=(x_0,y_0)$ **s'allunya indefinidament sobre la corba** $\Leftrightarrow |P| \longrightarrow \infty \Leftrightarrow$ P és de la corba $y_0=f(x_0)$ i x_0 i/o y_0 tendeixen a $\pm\infty$.

La recta r és **una asímptota** a $y=f(x) \Leftrightarrow d(P,r) \xrightarrow[|P|\to\infty]{} 0$.

TIPUS I CÀLCUL DE LES ASÍMPTOTES.

Donada la corba $y = f(x)$ diem que:

La recta $x = a$ és una asímptota vertical $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a\pm} f(x) = \pm\infty$ **.**

Observem que les asímptotes verticals, sols poden existir en els punts de discontinuïtat de la funció.

Quan $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, sols hi poden haver asímptotes verticals en els zeros de $Q(x)$.

La recta $y = a$ és una asímptota horitzontal $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ **o** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$ **.**

Es clar que, com a molt, hi ha dues asímptotes horitzontals. Una si anem cap a $+\infty$ i l'altra per a $-\infty$.

Si $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ sols hi ha una única asímptota horitzontal quan grau $P(x) \leq$ grau $Q(x)$.

La recta $y = mx + n$ és asímptota obliqua $\Leftrightarrow$

$$\exists\ m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad \exists\ n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)$$

o

$$\exists\ m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad \exists\ n = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx)$$

Observeu que les asímptotes horitzontals són un cas particular de les obliqües, el que correspon a $m=0$.

Es clar que com a molt hi ha dues asímptotes obliqües, una per $+\infty$ i l'altra per $-\infty$.

Si $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ sols hi ha una única asímptota obliqua quan grau $Q(x)$ = grau $P(x)+1$.

Exemples :

- $y = \dfrac{x^2}{2x - x^2}$

  Verticals:

  Com és un quocient de polinomis, és contínua a tots els reals excepte quan $2x\text{-}x^2=0$ $\Rightarrow$ L'únic punt de discontinuïtat és el -1, per tant sols cal mirar per x=-1.

  $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x - x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x(2 - x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2 - x} = 0 \Rightarrow$$ el 0 és una discontinuïtat evitable $\Rightarrow$ no hi ha asímptota vertical.

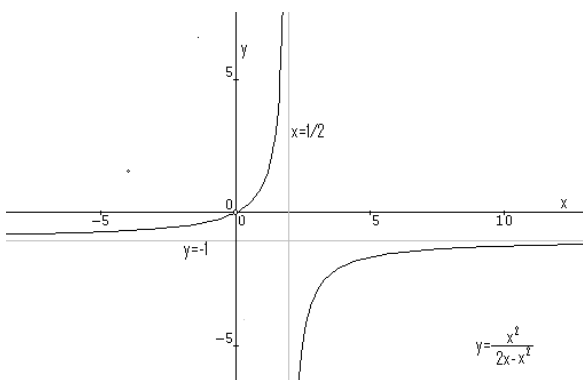
  $$\lim_{x\to 1/2} \frac{x^2}{2x - x^2} = \frac{1/4}{0} = \pm\infty \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$ és una asímptota vertical.

  Horitzontals :

  Com $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2}{2x - x^2} = \lim_{x\to \infty} \dfrac{1}{2/x - 1} = -1 \Rightarrow$

  $\Rightarrow$ y = -1 és asímptota horitzontal

  Obliqües: no en té ja que asímptotes horitzontals.



- $y = \dfrac{x^3}{(1 + x)^2}$

  Verticals:

  L'únic punt de discontinuïtat és el -1, per tant sols cal mirar per x=-1.

  $$\lim_{x\to -1} \frac{x^3}{(1 + x)^2} = \frac{-1}{0} = \pm\infty \Rightarrow x = -1$$ és asímptota vertical

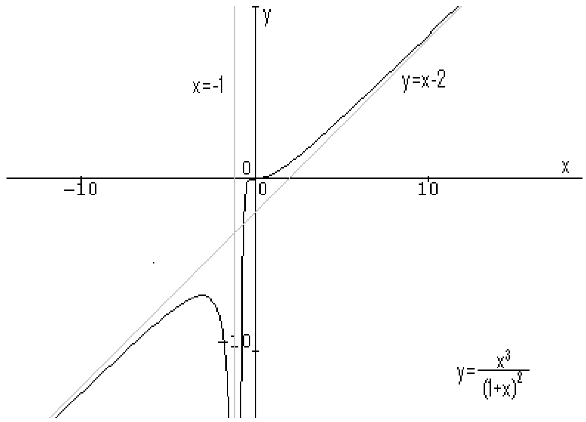
  Horitzontals :

  Com $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^3}{(1 + x)^2} = \infty \Rightarrow$ no té asímptota horitzontal

Obliqües: $m = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(1+x)^2} = 1$

$$n = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(1+x)^2} - 1\cdot x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 - 2x^2 - x}{(1+x)^2} = -2$$

per tant la recta $y = x - 2$ és una asímptota obliqua.



DERIVADA D'UNA FUNCIÓ EN UN PUNT.

Donada la funció $f:(a,b) \longrightarrow R$ i $x_0 \in (a,b)$, diem que:

$$x \longrightarrow y=f(x)$$

f és derivable en x_0 $\Leftrightarrow$ existeix $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

d'aquest límit, en diem la **derivada de f en x_0** i el representem per $f'(x_0)$ o $y'(x_0)$ o $(df / dx)(x_0)$.

Si anomenem **increment de x** = $\Delta x = x - x_0$ i **increment de y** = $\Delta y = f(x) - f(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Exemple:

Calculem a partir de la definició, la derivada de $y=\sqrt{x}$ en el punt d'abscissa 7.

$$y'(7) = \lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{7}}{x - 7} = \lim_{x\to 7} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{7})\cdot(\sqrt{x} + \sqrt{7})}{(x-7)\cdot(\sqrt{x} + \sqrt{7})} \Rightarrow$$

$$y'(7) = \lim_{x\to 7} \frac{x - 7}{(x-7)\cdot(\sqrt{x} + \sqrt{7})} = \lim_{x\to 7} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{7}} = \frac{1}{2\sqrt{7}}$$

FUNCIÓ DERIVADA - DERIVADES SUCCESSIVES.

Donada la funció $f:(a,b) \longrightarrow R$, diem que:

f és derivable a l'interval (a,b) ⇔ és derivable a tots els punts de l'interval.

Si una funció és derivable a l'interval (a,b), podem considerar una altra funció que assigna a cada x_0 el valor de la derivada de f en aquest x_0

$$\begin{aligned} (a,b) &\longrightarrow R \\ x &\longrightarrow \text{derivada de f en } x = f'(x) \end{aligned}$$

d'aquesta funció en diem **funció derivada de f** i la representem per:

$$\begin{aligned} f':(a,b) &\longrightarrow R \\ x &\longrightarrow f'(x) \end{aligned}$$

Observeu que f ' és una funció real de variable real i, per tant, pot ser (no n'està pas obligada) que sigui derivable.

Si f ' és derivable a l'interval (a,b), podrem parlar de la derivada de f ' que en direm derivada segona o f ''.

$$\begin{aligned} f'':(a,b) &\longrightarrow R \\ x &\longrightarrow \text{derivada de } f' \text{ en el punt } x \end{aligned}$$

f '' torna a ser una funció real de variable real i si és derivable a tot (a,b), podrem trobar la seva funció derivada, la (f '')' que anomenarem derivada tercera o f ''' .

I així, en general, es defineix la derivada n-èssima com la derivada de la (n-1)-èssima derivada:

$$f^{n)} = \left(f^{(n-1)} \right)'.$$

CONTINUÏTAT DE LES FUNCIONS DERIVABLES.

$f:(a,b) \longrightarrow R$ $x_0 \in (a,b)$ f derivable en x_0 ⇒ f contínua en x_0 .

És a dir: **f derivable ⇒ f contínua .**

Demostració:

f derivable en $x_0 \Rightarrow \exists f'(x_0) \in R$.

Calculem el $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0) \right) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) =$

per ser el límit del producte, el producte dels límits

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0 .$$

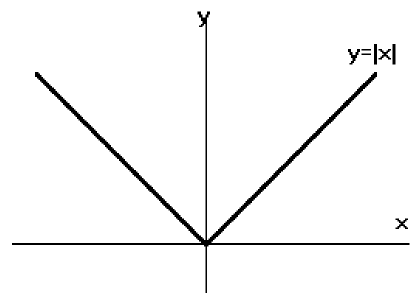
Per tant :

f derivable en $x_0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow$ f contínua en x_0.

Per veure-ho, n'hi ha prou en trobar una funció contínua en un punt i no derivable en aquest punt.

Per exemple, la funció valor absolut. és contínua en el punt 0 i no és derivable en 0.

$$|x| = \begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$



$|x|$ **és contínua en 0** $\lim\limits_{x\to 0+} |x| = 0$, $\lim\limits_{x\to 0-} |x| = 0$ i $|0| = 0$.

$|x|$ **no és derivable en 0** $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x} = -1$$

Límits laterals diferents ⇒ no existeix límit funcional ⇒ $|x|$ no derivable en 0.

INTERPRETACIÓ GEOMÈTRICA DE LA DERIVADA.

La derivada d'una funció en un punt és igual al pendent de la recta tangent a la funció en aquest punt.

És a dir:

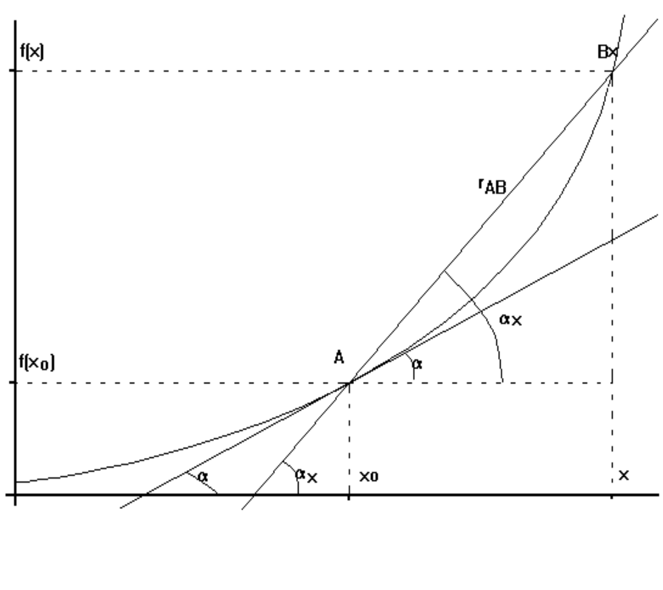
$f:(a,b) \longrightarrow R$

$x_0 \in (a,b)$

f derivable en $x_0 \Rightarrow f'(x_0)$ = pendent de la recta tangent en $(x_0, f(x_0))$.

Demostració:

Considerem el punt $A=(x_0,f(x_0))$.



Per a cada x d'un entorn de x_0 podem considerar el punt $B_x=(x,f(x))$.

Tracem la recta $\mathbf{r}_{AB}$ secant a la corba pels punts A i B_x .

Per definició de pendent, tenim que:

$$\text{pendent } \mathbf{r}_{AB} = \operatorname{tg} \alpha_x = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Si fem $x \longrightarrow x_0 \Rightarrow \mathbf{r}_{AB} \longrightarrow$ tangent en A

doncs: f derivable en $x_0 \Rightarrow$ f contínua en x_0

$\Rightarrow f(x) \longrightarrow f(x_0) \Rightarrow B_x \longrightarrow A$

$\Rightarrow \mathbf{r}_{AB} \longrightarrow$ tangent en A .

Per tant, quan $x \longrightarrow x_0$ el pendent de la secant per A i B_x passa a ser el pendent de la tangent en A.
Amb el que:

$$\text{pendent tangent} = \lim_{x \to x_0} \text{pendents secants per A i B} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

TANGENTS I NORMALS A UNA CORBA.
Si $y=f(x)$ és una funció derivable en un punt x_0, la interpretació geomètrica anterior, ens permet afirmar que l'equació de la recta **tangent** en el punt d'abscissa x_0 és:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0).$$

I que l'equació de la **normal** en x_0 és: $y - f(x_0) = \dfrac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

Exemple:
Calculem l'equació de la tangent a $y = x^3 + x$ en el punt d'abscissa -1.

Trobem en primer lloc les coordenades del punt de tangència:

$f(-1) = (-1)^3 + (-1) = -2 \Rightarrow$ punt tangència = (-1,-2).

Calculem y '(-1): $y' = 3x^2 + 1 \Rightarrow y'(-1) = 3(-1)^2 + 1 = 4$.

La recta buscada és $y + 2 = 4(x + 1)$; i expressada en forma explícita és: $y = 4x + 2$.

CÀLCUL DE DERIVADES.

REGLES DE DERIVACIÓ.

La derivada d'una constant és 0.

$f(x)=k$ =constant $\Rightarrow$ f és derivable i $f'(x)=0$.

Ja que: $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{k - k}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{0}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} 0 = 0$.

La derivada d'una suma és la suma de derivades.

$y=f(x)$ i $y=g(x)$ derivables en x_0 g $\Rightarrow$
$y = f(x) + g(x)$ derivable en x_0 i $(f+g)'(x_0)=f'(x_0) + g'(x_0)$
Ja que:

$$(f+g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0) .$$

La derivada d'una constant per una funció és la constant per la derivada de la funció.

$y=f(x)$ derivable en x_0 i k constant $\Rightarrow y = k\cdot f(x)$ derivable en x_0 i
$(k\cdot f)'(x_0)=k\cdot f'(x_0)$

Ja que:

$$(k\cdot f)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{k\cdot f(x) - k\cdot f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{k\cdot\left(f(x) - f(x_0)\right)}{x - x_0} = k\cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k\cdot f'(x_0) .$$

La derivada d'un producte és la derivada del primer factor per el segon més la derivada del segon per el primer.

$y=f(x)$ i $y=g(x)$ derivables en x_0 $\Rightarrow$

$y = f(x)\cdot g(x)$ derivable en x_0 i $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$

Ja que:

$$(f\cdot g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{x - x_0} =$$

sumant i retant $f(x)\cdot g(x_0)$

$$(f\cdot g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x_0) + f(x)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{x - x_0}$$

i traient factor comú

$$(f\cdot g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\cdot\left(g(x) - g(x_0)\right) + \left(f(x) - f(x_0)\right)\cdot g(x_0)}{x - x_0}$$

com el límit d'una suma és la suma dels límits:

$$(f\cdot g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\cdot\left(g(x) - g(x_0)\right)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{\left(f(x) - f(x_0)\right)\cdot g(x_0)}{x - x_0}$$

com el límit d'un producte és el producte dels límits:

$$(f\cdot g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\cdot \lim_{x\to x_0} g(x_0)$$

com f és contínua al ser derivable

$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$.

Propietat

$y=g(x)$ derivable en x_0 i $g(x_0)\neq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{g}$ derivable en x_0 i $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Ja que:

Com $g\cdot\frac{1}{g} = 1$

derivant els dos membres tenim que:

$$\left(g\cdot\frac{1}{g}\right)' = 0 \Rightarrow g'\cdot\frac{1}{g} + g\cdot\left(\frac{1}{g}\right)' = 0$$

i isolant

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'\cdot\frac{1}{g}}{g} = \frac{-g'}{g^2}$$

és a dir:

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$$

La derivada d'un quocient és la derivada del numerador pel denominador menys la derivada del denominador pel numerador partit tot pel denominador al quadrat.

$y=f(x)$ i $y=g(x)$ derivables en x_0 i $g'(x_0)\neq 0 \Rightarrow$

$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ derivable en x_0 i $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - g'(x_0)\cdot f(x_0)}{g^2(x_0)}$

Ja que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\cdot\frac{1}{g}(x_0) + f(x_0)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\cdot\frac{1}{g}(x_0) + f(x_0)\cdot\frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)} = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - g'(x_0)\cdot f(x_0)}{g^2(x_0)} \;.$$

TAULA DE DERIVADES.

$y = k = ctt \Rightarrow y' = 0$

$y = f+g \Rightarrow y' = f'+g'$

$y = k f \Rightarrow y' = k f'$

$y = f g \Rightarrow y' = f'g + f g'$

$$y = \frac{f}{g} \Rightarrow y' = \frac{f'g - f'g'}{g^2}$$

$y = x^\alpha \Rightarrow y' = \alpha x^{\alpha-1}$

$y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$y = a^x \Rightarrow y' = a^x \ln a$

$y = e^x \Rightarrow y' = e^x$

$y = \log_a x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x \ln a}$

$y = \ln x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x}$

$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$

$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$

$$y = tg\, x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + tg^2 x$$

$$y = ctg\, x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x = -(1 + ctg^2 x)$$

$y = \sec x \Rightarrow y' = \sec x \; tg\, x$

$y = \operatorname{cosec} x \Rightarrow y' = -\operatorname{cosec} x \; ctg\, x$

$y = \arcsin x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$y = \arccos x \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$y = arc\, tg\, x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$

$y = arc\, cotg\, x \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{1 + x^2}$

$y = arc\, sec\, x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

$y = arc\, cosc\, x \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

DERIVACIÓ DE FUNCIONS COMPOSTES. REGLA DE LA CADENA.

Donades $f:(a,b) \longrightarrow R$ i $g:(c,d) \longrightarrow R$ que es puguin composar $f(a,b) \subset (c,d)$.

$x \longrightarrow u=f(x)$ $\quad u \longrightarrow z=g(u)$

$x_0 \in (a,b)$ f derivable en x_0 i g derivable en $f(x_0) = u_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow g \circ f$ és derivable en x_0 i $(g \circ f)' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = g'(y_y) \cdot f'(x_0)$.

Ja que:

Per definició de derivada $(g \circ f)'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta x}$

multiplicant i dividint per Δ u

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta z}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta u} \right] = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta z}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

com el límit d'un producte és el producte dels límits tenim que:

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta z}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \ .$$

Com $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ substituint obtenim que:

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta u} \cdot f'(x_0)$$

Per altra banda com

f der en $x_0 \Rightarrow$ f contínua en $x_0 \Rightarrow$ quan $x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to f(x_0)$

i per tant

quan $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta u \to 0$

amb el que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta u} = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta u} = g'(u_0)$

I per tant: $(gof)'(x_0) = g'(u_0) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Exemples :

- Si volem derivar $y=(4x-3)^2$, podem desenvolupar el binomi o fer el següent:
  De 4x-6 en diem t $\quad$ 4x-6=t.
  Llavor la funció a derivar és $y=t^2 \Rightarrow y' = 2 \cdot t \cdot t'$
  Com $t'=4$
  Tenim que $y'=2 \cdot (4x-3) \cdot 4 = 8 \cdot (4x-3)$.

- Si hem de derivar $y = (x^4+5x)^{12}$
  Podem considerar que $u = x^4+5x$
  I per tant hem de derivar la funció $y = u^{12}$
  Amb el que $y'=12\, u^{11} \cdot u' = 12\,(x^4+5x)^{11} \cdot (x^4+5x)' = 12\,(x^4+5x)^{11} \cdot (4x^3+5)$.

DERIVADA DE FUNCIONS RECÍPROQUES.

Si $f:(a,b) \longrightarrow (c,d)$ té recíproca $f^{-1}:(c,d) \longrightarrow (a,b)$

$x \longrightarrow y$ $\qquad$ $y \longrightarrow x$

$x_0 \in (a,b)$ i $y_0 = f(x_0)$

f derivable en x_0 i $f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow f^{-1}$ és derivable en y_0 i $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Demostració:

f i f^{-1} recíproques $\Rightarrow (f^{-1} \circ f)(x) = x = I(x)$.

Derivant aquesta expressió en el punt x_0, obtenim:

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 1 \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} .$$

Exemple:

Càlcul de la derivada de $y = \text{arc sin } x$.

Prenem $x = \sin y$ i $y = \text{arc sin } x$, que són recíproques entre $(-\pi/2, \pi/2)$ i $(-1,1)$.

Llavors $\qquad y' = \dfrac{1}{\sin' y} = \dfrac{1}{\cos y}$.

Com $\qquad \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$,

substituint:

$$(\text{arc sin})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} .$$

CREIXEMENT I DECREIXEMENT.

Donada $f:(a,b) \longrightarrow R$ $x_0 \in (a,b)$, diem que:

f és creixent en el punt x_0 $\Leftrightarrow$ per valors de x propers a x_0, els punts anteriors a x_0 tenen imatges anteriors a la imatge de x_0, i els punts posteriors a x_0 tenen imatges posteriors a la imatge de x_0.

f és **creixent** en $x_0 \Leftrightarrow \exists\, \delta > 0$ i $\forall\, x \mid |x - x_0| \langle\ \delta \Rightarrow \begin{cases} x < x_0 \ \Rightarrow\ f(x) < f(x_0) \\ x_0 < x \ \Rightarrow\ f(x_0) < f(x) \end{cases}$

f és decreixent en el punt x_0 $\Leftrightarrow$ per valors de x propers a x_0, els punts anteriors a x_0 tenen imatges posteriors a la imatge de x_0, i els punts posteriors a x_0 tenen imatges anteriors a la imatge de x_0

f és **decreixent** en $x_0 \Leftrightarrow \exists\, \delta > 0$ i $\forall\, x \mid |x - x_0| \langle\ \delta \Rightarrow \begin{cases} x < x_0 \ \Rightarrow\ f(x) > f(x_0) \\ x_0 < x \ \Rightarrow\ f(x_0) < f(x) \end{cases}$

PROPIETAT I .

$f:(a,b) \longrightarrow R$ $x_0 \in (a,b)$ i f derivable en x_0

f creixent en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$.

f decreixent en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$.

Demostració:

$$f \text{ creixent en } x_0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0 \text{ i } \forall\, x \quad |x - x_0| \langle\ \delta \Rightarrow \begin{cases} x < x_0 \ \Rightarrow\ f(x) < f(x_0) \\ \\ x_0 < x \ \Rightarrow\ f(x_0) < f(x) \end{cases}$$

I per tant, quan $|x - x_0| \langle\ \delta$, es compleix que:

$x - x_0 < 0 \ \Rightarrow\ x < x_0 \ \Rightarrow\ f(x) < f(x_0) \ \Rightarrow\ f(x) - f(x_0) < 0$

$x - x_0 > 0 \ \Rightarrow\ x > x_0 \ \Rightarrow\ f(x) > f(x_0) \ \Rightarrow\ f(x) - f(x_0) > 0$

O dit d'una altra manera, per $|x - x_0| \langle\ \delta$ $x - x_0$ i $f(x) - f(x_0)$ tenen el mateix signe

és a dir : si $|x - x_0| \langle\ \delta$ $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.

Per definició de derivada , f derivable en $x_0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

Quan fem l límit $x \to x_0$, arriba un moment en que $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow$ és el límit d' una expressió que sempre és >0 $\Rightarrow$ el límit és ≥ 0 .

Amb el que:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{+}{+} \geq 0 .$$

Anàlogament es demostra que: f decreixent en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$.

PROPIETAT I I

$f:(a,b) \longrightarrow R$ $x_0 \in (a,b)$ i f derivable en x_0

$f'(x_0) > 0 \Rightarrow$ f creixent en x_0 .

$f'(x_0) < 0 \Rightarrow$ f decreixent en x_0 .

Demostració:

Demostrarem que $f'(x_0)>0 \Rightarrow$ f creixent en x_0.

Suposem f derivable en x_0 i $f'(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) > 0 \Rightarrow$

Sabem que valors negatius o nuls, sols poden donar límits negatius o nuls. I per tant si aquest límit és positiu , cal que pels valors de x suficientment propers a x_0 , el quocient $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ sigui estrictament positiu.

És a dir $\exists\, \delta > 0$ i $\forall x$ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow$

$$\exists\, \delta > 0 \text{ i } \forall x \quad |x - x_0| < \delta \begin{cases} \text{si } x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \\ \\ \text{si } x - x_0 > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\exists\, \delta > 0 \text{ i } \forall x \quad |x - x_0| \Rightarrow \begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \\ \\ x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \end{cases} \Rightarrow$$

Per tant: f és creixent en x_0 .

Observació: Combinant les dues propietats anteriors, tenim que:

Per estudiar el creixement d'una funció, sols ens cal estudiar el signe que té la seva derivada.

EXTREMS D'UNA FUNCIÓ.

Donada $f:[a,b] \longrightarrow R$ diem que:

$x_0 \in [a,b]$ és **màxim absolut** de f a $[a,b] \Leftrightarrow \forall x \in [a,b] \quad f(x) \leq f(x_0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x_0)$ és el valor mes gran de totes les imatges.

$x_0 \in [a,b]$ és **mínim absolut** de f a $[a,b] \Leftrightarrow \forall x \in [a,b] \quad f(x) \geq f(x_0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x_0)$ és el valor mes petit de totes les imatges.

$x_0 \in [a,b]$ és extrem absolut de f a $[a,b] \Leftrightarrow x_0$ és un màxim o un mínim absolut.

$x_0 \in (a,b)$ és màxim relatiu de f a $(a,b) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists \delta > 0$ i $\forall x \in (a,b)$ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ per les x properes a x_0, $f(x_0)$ és el valor mes gran de les imatges .

$x_0 \in (a,b)$ és mínim relatiu de f a $(a,b) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists \delta > 0$ i $\forall x \in (a,b)$ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ per les x properes a x_0, $f(x_0)$ és el valor mes petit de les imatges .

$x_0 \in (a,b)$ és extrem relatiu de f a $(a,b) \Leftrightarrow x_0$ és un màxim o un mínim relatiu .

PROPIETAT.

$f:(a,b) \longrightarrow R$ $x_0 \in (a,b)$ i f derivable en x_0.

x_0 extrem relatiu de f $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Demostració:

Suposem x_0 màxim de f , (si és mínim es raona de forma semblant)

$x_0 \in (a,b)$ màxim $\Rightarrow \exists \delta > 0$ i $\forall x \in (a,b)$ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) \leq 0$.

Per ser f derivable en $x_0 \Rightarrow \exists f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$\Rightarrow$ existeixen els límits laterals i coincideixen amb $f'(x_0)$.

Degut a que fem el límit quan $x \to x_0$, arriba un moment en que $|x - x_0| < \delta$.

I per tant

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0+ \\ |x-x_0|<\delta}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ |x-x_0|<\delta \\ x>x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim \frac{-}{+} \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0 .$$

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0- \\ |x-x_0|<\delta}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ |x-x_0|<\delta \\ x<x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim \frac{-}{-} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0 .$$

És a dir , per un costat $f'(x_0) \leq 0$ i per l'altra $f'(x_0) \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$.