Còniques

Introducció

Reben el nom de seccions còniques el conjunt de les diferents figures que s´obtenen en tallar una superfície cònica amb un pla que no passi pel vèrtex.
La inclinació del pla respecte de l'eix de la superfície cònica dóna lloc a la circumferència, l'el·lipse, la hipèrbola i la paràbola.

- La **circumfèrencia** es forma quan el pla és perpendicular a l'eix del con.
- L'**el·lipse** es forma quan el pla no és perpendicular a l'eix del con ni paral·lel a la generatriu.
- La **hipèrbola** es forma quan el pla és paral·lel a l'eix del con.
- La **paràbola** es forma quan el pla és paral·lel a la generatriu del con.

Llocs geomètric

Es denomina **lloc geomètric** al conjunt de punts del pla que satisfan una propietat determinada i que son los únics punts que la cumpleixen.

Circumferència

Concepte

Entenem per **circumferència** al lloc geomètric dels punts del pla que estan a una distància fixa, anomenada *radi*, d'un punt fix, que en diem *centre*.

Equació de la circumferència

Considerem $\boldsymbol{C}$ la circumferència de centre $O=(x_0, y_0)$ de radi r .
Un punt X de coordenades X(x, y) és de la circumferència $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x, y) \in \boldsymbol{C} \Leftrightarrow d(X, O) = r \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Desenvolupant els quadrats tenim que:

$$x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$$

Anomenant $A = -2x_0$, $B = -2y_0$ i $C = x_0^2 + y_0^2 - r^2$
és a dir
$X=(x, y) \in \boldsymbol{C} \Leftrightarrow \mathbf{x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0}$
que és l'anomenada **equació general de la circumferència**.

Exemples

1. *Troba l'equació general de la circumferència de centre O(-2, 0), i radi r=3.*

   L'equació de la circumferència és:

$$(x+2)^2+(y-0)^2=9$$

   Aquesta expressió desenvolupada ens dóna l'equació de la circumferència en forma general:

$$x^2+y^2+4x-5=0$$

2. *Troba el centre i el radi de la circumferència l'equació de la qual és*

$$x^2+y^2-4x+2y-4=0$$

   Sabem que A=-4, B=2, C=-4, per tant, si:

$$A=-2x_0 \Rightarrow -4=-2x_0 \Rightarrow \mathbf{x_0=2}$$

$$B=-2y_0 \Rightarrow 2=-2y_0 \Rightarrow \mathbf{y_0=-1}$$

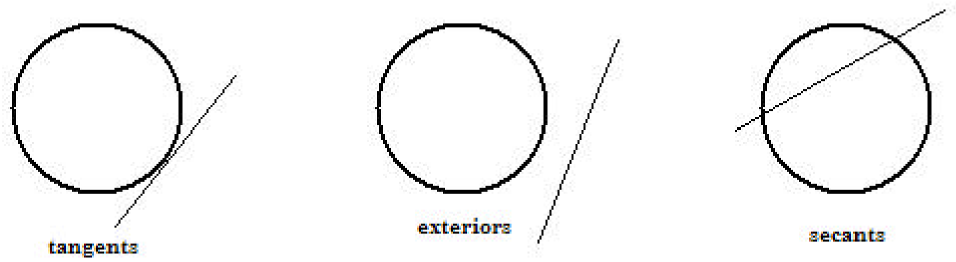
$$C=x_0^2+y_0^2-r^2 \Rightarrow -4=2^2+(-1)^2-r^2 \Rightarrow \mathbf{r=3}$$

   El centre de la circumferència és O(2,-1), i el radi, r =3.

Posició relativa d'una recta i una circumferència

Una recta i una circumferència poden ser:

- **Secants:** si tenen dos punts comuns
- **Tangents:** si només tenen un punt en comú
- **Exteriors:** si no tenen cap punt comú.



Si hi ha algun punt comú entre la recta i la circumferència , aquest ha de verificar l' equació de la recta i la de la circumferència.

Això significa que la solució del sistema format per l'equació de la recta i l'equació de la circumferència, determina, quina és la posició relativa entre totes dues:

- Si té **dues solucions**, la recta i la circumferència són **secants.**
- Si té **una solució,** la recta i la circumferència són **tangents.**
- Si **no té solució**, la recta i la circumferència són **exteriors.**

Exemple

1. *Troba la posició relativa entre la recta r:2x+y-3=0 i la circumferència C:$x^2+y^2-2x+3y+2=0$*

   Plantegem el sistema format per les dues equacions i el resolem:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y-3=0 \\ x^2+y^2-2x+3y+2=0 \end{array}\right\}$$

   Aïllem la variable y de l'equació de la recta, i la substituïm a l'equació de la circumferència:

$$\left.\begin{array}{r} y=-2x+3 \\ x^2+(-2x+3)^2-2x+3(-2x+3)+2=0 \end{array}\right\}$$

   Obtenim l'equació de segon grau, $x^2-4x+4=0$

   Aquesta equació té només una solució x=2. Per tant, la recta és tangent a la circumferència, i el punt de tall és P(2, -1).

Recta tangent.

Si P(a,b) és un punt de la circumferència de centre O(x_0,y_0), la recta tangent a la circumfèrencia en aquest punt P és perpendicular a la recta que uneix el centre O i el punt P.

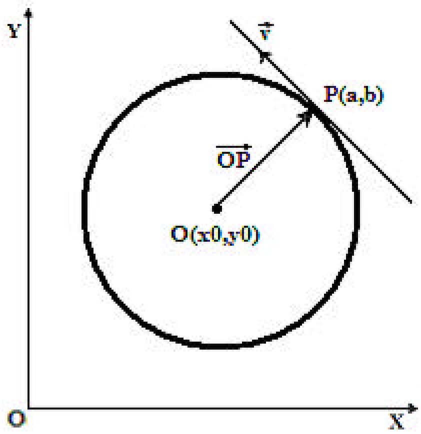
$\overrightarrow{OP}=(a,b)-(x_0,y_0)=(a-x_0,b-y_0)$,

un vector perpendicular a $\overrightarrow{OP}$ es $\vec{v}=(b-y_0,x_0-a)$

La equació de la recta que passa por P i té com a vector director $\vec{v}$ és la següent :

$$y-b=\frac{x_0-a}{b-y_0}(x-a) \quad \Rightarrow \quad \frac{x-a}{b-y_0}=\frac{y-b}{x_0-a}$$

que és l'equació de la recta tangent a una circumferència en P.



Exemple

1. *Troba l'equaciò de la recta tangent a la circumferència $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ en el punt P(2,1).*

   El punt P pertany a la circumferència, ja que verifica l'equació.

   El centre és O(2,-3)

   El vector $\overrightarrow{OP}=(0,4)$. Un vector perpendicular a $\overrightarrow{OP}$ és (4,0). L'equació de la tangent és :

$$y-1=\frac{0}{4}(x-2) \quad \Rightarrow \quad y-1=0$$

Potència d'un punt respecte una circumferència

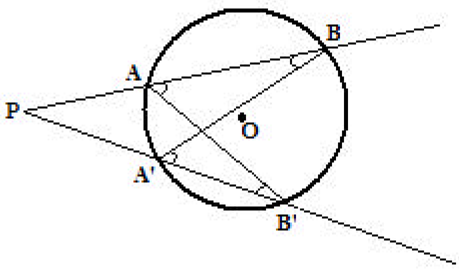
Considerem un punt P del pla i una circumferència C, i tracem dues semirrectes secants a la circumferència que tinguin l'origen en el punt P.

Siguin A, B y A', B' els punts del tall de les rectes amb la circumferència.

Els triangles PAB i PA'B són semblants, ja que P és comú i $\hat{B} = \hat{B}'$, per esser inscrits que abarquen el mateix arc en la circumferència

llavors:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PA'}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PB'}} \Rightarrow \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA'} \cdot \overline{PB'}$$



Si tracem una altre secant que passi per P tendríem, raonant de manera análoga,

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA'} \cdot \overline{PB'} = \overline{PA''} \cdot \overline{PB''} = \text{constant}$$

És a dir, el producte és constant sigui quina sigui la secant traçat des de P.

A aquesta constant se l'anomena **potència del punt P** respecte de la circunferència, y es dessigna per $Pot_C(P)$.

Definició

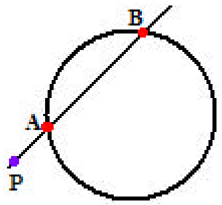
S'anomena potència d'un punt P respecte d'una circumferència al producte escalar $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$, on A i B són els punts on la recta secant que passa per P talla a la circumferència.

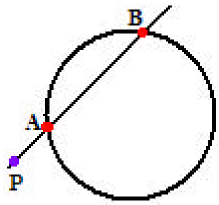
$$Pot_c(P) = \pm \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$$

- Si P≠A i P≠B, tenim:

  $$\mathbf{Pot_c(P)} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \left\|\overrightarrow{PA}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{PB}\right\| \cdot \cos(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) = \pm\left\|\overrightarrow{PA}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{PB}\right\| = \pm\mathbf{\overline{PA} \cdot \overline{PB}}$$

  $$\text{ja que } (\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) = \begin{cases} 0 \\ \text{ð} \end{cases}$$

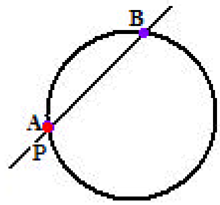




- Si P=A o P=B,

  $\overrightarrow{PA}$ o $\overrightarrow{PB}$ és el vector null i per tant

  $$\mathbf{Pot_c(P)} = \mathbf{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0}$$

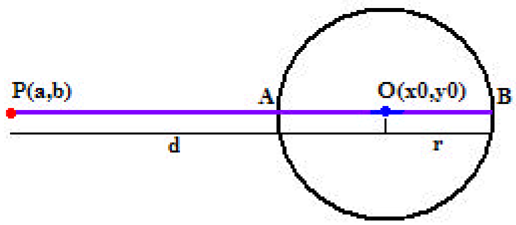


Per tant:

- Si P és un punt exterior a la circumferència, $Pot_c(P)>0$.
- Si P és un punt interior a la circumferència, Potc(P)<0.
- Si P és un punt de la circumferència, $Pot_c(P)=0$.

Expresió Analítica

Considerem la semirrecta secant que passa pel centre de la circumferència i anomem d a d(P,O).



La potència del punt P serà:

$$Pot_c(P) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (d-r)(d+r) = d^2 - r^2$$

per tant

$$\mathbf{Pot_c(P) = d^2 - r^2}$$

Com d(P,O), tenim que

$$d^2=(a-x_0)^2+(b- y_0)^2$$

i per tant la potència d'un punt respecte d'una circumferència es calcula mitjançant la següent igualtat:

$$Pot_c(P)=(a-x_0)^2+(b- y_0)^2-r^2, \text{ o bé:}$$

$$Pot_c(P)=a^2 + b^2 + Aa + Bb + C$$

Observa que per calcular la potència d'un puntP respecte d'una circumferència de centre O(x_0,y_0), només cal substituir les coordenades del punt P(a,b) a l'equació de la circumferència.

Exemples

1. *Trobar la potència del punt P(2,-4) respecte de la circumferència $x^2+y^2-3x+y-5=0$.*
   $Pot_c(P)=2^2+(-4)^2-3\cdot 2+(-4)-5=5$

2. *Trobar la longitud del segment tangent a la circumferència x2+y2+5x-3y+3=0 traçat des del punt P(1,3).*
   Sigui A el punt de tangència, es verifica
   $$Pot_c(P) = \overline{PA}\cdot\overline{PA} = \overline{PA}^2$$
   $$\overline{PA} = \sqrt{Pot_C(P)} = \sqrt{1^2+3^2+5\cdot 1-3\cdot 3+3} = \sqrt{9} = 3$$

Posició relativa d'un punt respecte d'una circumferència

La potència d'un punt P respecte d'una circumferència dóna informació de la posició del punt respecte de la circumferència:

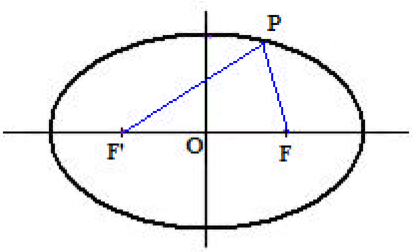
$Pot_c(P)=d^2-r^2$

- **Si $Pot_c(P) > 0$** $\Rightarrow d^2-r^2 > 0 \Rightarrow d > r \Rightarrow$P és **exterior** a la circumferència.
- **Si $Pot_c(P) = 0$** $\Rightarrow d^2-r^2 = 0 \Rightarrow d = r \Rightarrow$P **pertany** a la circumferència.
- **Si $Pot_c(P) < 0$** $\Rightarrow d^2-r^2 < 0 \Rightarrow d < r \Rightarrow$P és **interior** a la circumferència.

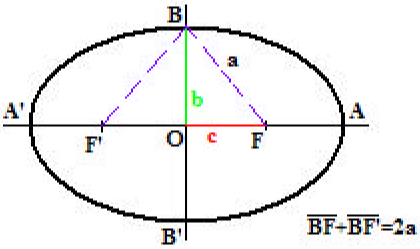
El·lipse

Concepte

L'el·lipse és el lloc geomètric dels punts del pla la suma de distàncies dels quals a dos punts fixos, anomenats *focus* és constant.
Aquesta suma constant de distàncies s'acostuma a representar per *2a*.



Elements característics



En l'el·lipse, a més del *focus*, hi definim els elements següents:

- **Focus:** punts fixos F' i F.
- **Distància focal:** és la distància entre els dos focus F' i F, i es designa per 2*c*.

$$\boxed{\overline{F'}\,\overline{F} = 2c}$$

- **Radi vectors :** Sigui P un punt de l'el·lipse, els segments $\overline{PF}$ i $\overline{PF}$ rebren el nom de **radi vectors.** La suma dels radi vectors d'un punt és, per definició d'el·lipse, una quantitat constant que es denota per 2a.

$$\boxed{\overline{P}\,\overline{F'} + \overline{PF} = 2a}$$

- **Eix focal:** recta que passa pels focus.

  Eix secundari: mediatriu del segment F'F.

  Centre: és el punt d'intersecció dels eixos.

  Vèrtex: són els punts A, A', B, B', d'intersecció dels eixos amb l'el·lipse.

- **Eix major:** és el segment determinat pels punts A' i A de l'el·lipse.La distància entre aquests punts és la máxima d'entre tots els punts d'el·lipse.

  Com que A i A' són punts de l'el·lipse, verifiquen :

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AF}+\overline{A'F}=2a\\ \overline{A'F}+\overline{A'F'}=2a\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{AF}+\overline{A'F}+\overline{A'F}+\overline{A'F'}=4a\Rightarrow \overline{AA'}+\overline{A'A}=4a\Rightarrow \mathbf{\overline{AA'}=2a}$$

  Longitud de l'eix major : $\boxed{\overline{AA'}=2a}$

- **Eix menor:** és el segment determinat pels punts B', B de l'el·lipse. La distància entre aquests punts és la mínima d'entre tots els punts de l'el·lipse. La meitat de la longitud d'aquest segment es designa mitjançant *b*.
  Longitud de l'eix menor : $\boxed{\overline{BB'}=2b}$

- **Excentricitat:** s'anomena excentricitat i es representa amb el següent quocient:

$$\boxed{e=\frac{c}{a}}$$

  Com que $c < a$, l'excentricitat e és un nombre comprès entre 0 i 1.

  $0<e<1$.

Observa que si:

- $BF'+BF=2a \Rightarrow BF'=BF=a$
- L'eix menor $BB'=2b \Rightarrow OB'=OB=b$
- La distància focal $F'F=2c \Rightarrow OF'=OF=c$

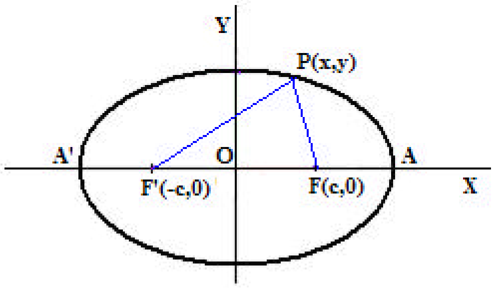
  Com que a, b i c formen un triangle rectangle, es pot establir la relació següent:

$$\boxed{a^2=b^2+c^2}$$

Equació reduïda de l'el·lipse

Anem a treballar amb una el·lipse centrada en l'origen de coordenades i amb els seus eixos coincidents amb els eixos de coodenades.

- Si l'eix focal està situat sobre l'eix d'abscisses, les coordenades del focus són $F'(-c,0)$, i $F(c, 0)$.



Donat P(x,y), un punt qualsevol de l'el·lipse, per definició:

$$\overline{PF'} + \overline{PF} = 2a$$

Com que

$$\overline{PF'} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \qquad \overline{PF} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

tenim

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevem al quadrat els dos membres d'aquesta igualtat

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

Simplifiquem i aïllem el radical:

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y} = 4a^2 - 4cx \Rightarrow a\sqrt{(x-c)^2 + y} = a^2 - cx$$

Elevem al quadrat:

$$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$a^2x^2-2ca^2x+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$a^2x^2+a^2y^2=a^4+c^2x^2-a^2c^2$$

$$a^2x^2+a^2y^2-c^2x^2=a^4-a^2c^2$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

Aplicant-hi la relació $b^2+c^2=a^2$, tenim:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

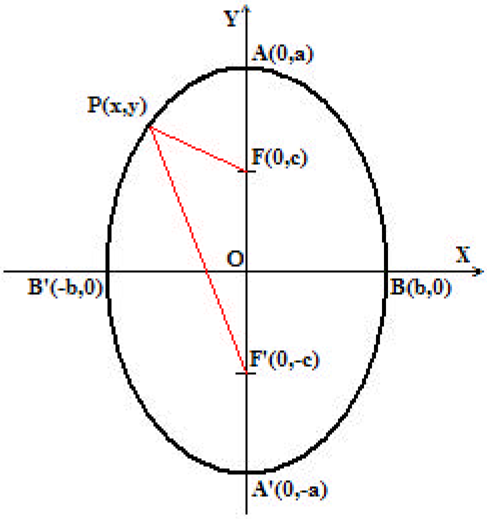
Dividint la igualtat per a^2b^2, resulta

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \textit{equació reduïda de l'el·lipse}}$$

- Si l'eix focal està situat sobre l'eix de les ordenades, les coordenades dels focus són F(0,*c*) i F'(0, -*c*).

Llavors l'equació reduïda de l'el·lipse és :

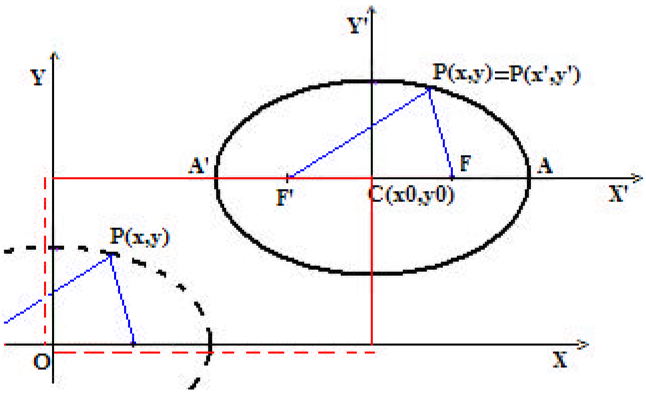
$$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$$



Equació de l'el·lipse d'eixos paral·lels als eixos de coordenades

Anem a treballar amb una el·lipse amb els seus eixos paral·les amb els eixos de coodenades i de centre un punt diferent de l'origen de coordenades.

- Supossem que l'eix focal és paral·lel a l'eix d'abscisses.



Sigui el punt C(x_0, y_0) el centre de l'el·lipse.
Si transladem els eixos de coordenades paral·lelament de forma que l'origen de coordenades sigui el punt C, l'equació de l'el·lipse referida a aquests eixos és

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

Com que les equacións de la translació són:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + x' \\ y &= y_0 + y' \end{aligned}\right\}$$

Resulta que l'equació de l'el·lipse és:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}$$

- Si l'eix focal és paral·lel a l'eix d'ordenades, l'equació será:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1}$$

Equación general de l'el·lipse

Partint de l'equació reduïda d'una el·lipse centrada en el punt (x_0,y_0), l'eix focal de la qual és paral·lel a l'eix d'abscisses, i operant obtenim l'equació reduïda de de l'el·lipse:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Multipliquem els dos membres de l'equació per $a^2 \cdot b^2$:

$$b^2\,(x-x_0)^2+a^2\,(y-y_0)^2=a^2\cdot b^2$$

Desenvolupant els quadrats i apliant-hi la distributiva:

$$b^2\cdot x^2-2b^2\cdot x\cdot x_0+b^2\,x_0^2+a^2\cdot y^2-2a^2\cdot y\cdot y_0+a^2\,x_0^2=a^2\cdot b^2$$

Transposem termes i associem:

$$b^2\cdot x^2+a^2\cdot y^2-2b^2\,x_0\,x-2a^2\,y_0\,y+(b^2\,x_0^2+a^2\,x_0^2-a^2\cdot b^2)=0$$

Anomenant A= b^2, B= a^2, C= $-2b^2$, D= $-2a^2\,y_0$, E= $b^2\,x_0^2+a^2\,x_0^2-a^2\cdot b^2$, l'expressió anterior queda:

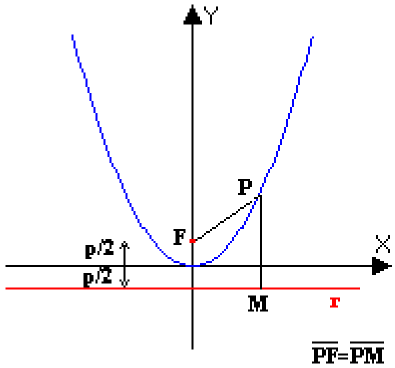
$$\boxed{A\,x^2+B\,y^2+C\,x+D\,y+E=0 \quad \textit{equació general de l' el·lipse}}$$

Observem que els valors A i B, en aquesta equació tenen el mateix signe.

Paràbola

Concepte

La paràbola es el lloc geomètric dels punts del pla que equidisten d'un punt fix, anomenat *focus*, i d'una recta fixa anomenada *directriu.*
Denotarem per F al focus i per *r* a la directriu.



Elements característics

En la paràbola, a més del focus i de la directriu, hi definim els elements següents:

- **Eix:** és la recta perpendicular a la directriu que passa pel focus.
- **Vèrtex:** és el punt d'intersecció de la paràbola amb el seu eix.
- **Paràmetre:** és la distància *p* del focus a la recta directriu.
- **Radi vector:** donat un punt P de la paràbola, el segment PF rep el nom de radi vector.

Equació reduïda

L'equació d'una paràbola que tingui per eix l'eix d'abscisses o l'eix d'ordenades i el vèrtex a l'origen de coordenades s'anomena equació reduïda de la paràbola.

- **Si l'eix está situat a sobre de l'eix d'abscisses**, les coordenades del focus són **F(*p*/2,0)** i l'equació de la recta directriu és r: **x = - *p*/2.**

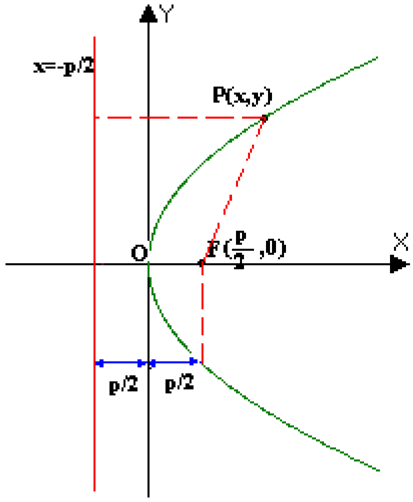
  Donat P(x,y), un punt qualsevol de la paràbola, per definició de paràbola:

$$d(P,r) = d(P,F)$$

Com que $d(P,r)=\dfrac{\left|x+\dfrac{p}{2}\right|}{\sqrt{0^2+1^2}}$ i $d(P,F)=\sqrt{\left(x-\dfrac{p}{2}\right)^2+y^2}$

ens queda:

$$\left|x+\frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$$



Elevem al quadrat:

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2$$

Simplifiquem i obtenim:

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

Aquesta equació es denomina **equació redüida de la paràbola**.

- **Si l'eix está situat sobre l'eix d'ordenades**, les coordenades del focus són **F(0, *p*/2)**, i l'equació de la recta directriu **r: y= - *p*/2.**

  Llavors l'equació redüida de la paràbola és:

$$\boxed{x^2 = 2py}$$

Exemple

1. *Escriu l'equació de la paràbola que té el focus en el punt (3,0) i per directriu la recta x=-3.*
   Es tracta d'una paràbola amb l'eix situat a sobre de l'eix d'abscisses.

   Com que la directriu és $x = -\frac{p}{2}$ y en el nostre cas $x = -3$, será $-\frac{p}{2} = 3$,

   resulta $p = 6$.
   L'equació serà y^2=12x

Equació de la paràbola d'eix paral·lel a l'eix d'abscisses o d'ordenades

- **Si l'eix de la paràbola és paral·lel a l'eix d'abscisses**
  Sigui O'(x_0,y_0) el vertéx de la paràbola, mitjant la translació d'eixos

$$\left.\begin{array}{l} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{array}\right\}$$

Fem coincidir l'origen de coordenades amb el vertéx.
Respecte d'aquests últims eixos l'equació de la paràbola és:

$$y'^2 = 2px'$$

Tenim en compte la translació ens queda:

$$\boxed{(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)} \quad \text{(P1)}$$

que és l'equació d'una parábola amb l'eix paral·lel a l'eix d'abscisses, de vértex (x_0,y_0).

- **Si l'eix de la paràbola és paral·lel a l'eix d'ordenades,** obtenim l'expressió:

$$\boxed{(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)} \quad \text{(P2)}$$

que és l'equació d'una parábola amb l'eix paral·lel a l'eix d'ordenades, de vértex (x_0,y_0).

Equació general de la paràbola

Partint de l'expressio (P1), operem per obtener l'equació general de la paràbola:

$$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$$

$$y^2-2y_0\,y + y_0^2 = 2px-2px_0$$

$$-2px = -y^2+2y_0\,y - y_0^2 \ -2px_0$$

$$2px = y^2- 2y_0\,y + y_0^2 \ + 2px_0$$

$$x = \frac{1}{2p}y^2 - \frac{y_0}{p}y + \left(\frac{y_0^2}{2p} + x_0\right)$$

Anomenant $A = \dfrac{1}{2p}$ $\quad B = -\dfrac{y_0}{p}$ $\quad C = \dfrac{y_0^2}{2p} + x_0$ l'equació queda :

$$\boxed{x = Ay^2 + By + C}$$

que és l'equació general d'una paràbola amb l'eix paral·lel a l'eix d'abscisses.

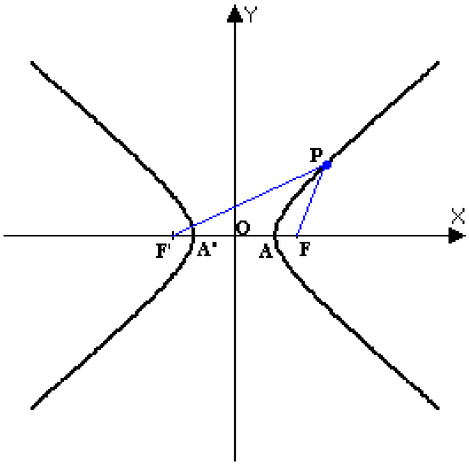
Anàlogament l'equació d'una paràbola amb l'eix paral·lel a l'eix d'ordenades será:

$$\boxed{y = Ax^2 + Bx + C}$$

Hipèrbola

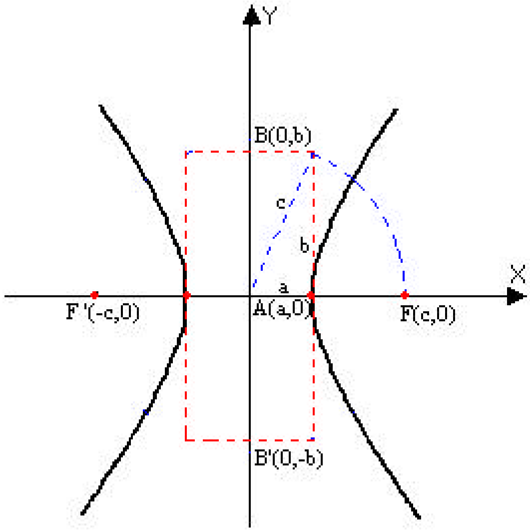
Concepte

La hipèrbola és el lloc geomètric dels punts del pla que compleixen la condició que la diferència de les seves distancies a dos punts fixos, anomenats focus, és constant. Aquesta distància és $2a$.



Elements característics

En la hipèrbola, a més del focus, hi definim els elements següents:



- **Eix real:** és la distància entre els punts A' i A, que són els **vèrtexs** de l'hipèrbola.
  La longitud de l'eix real : $\overline{A'A} = 2a$
- **Eix imaginari:** és la mediatriu del segment F'F.
- **Eix focal:** és la recta determinada pels focus F' i F.
- **Distància focal:** és la distància entre els focus F' i F.

  La longitud de la distància focal : $\overline{F'F} = 2c$
- **Centre:** és el punt mitjà O del segment determinat pels focus, que coincideix amb el seu centre de simetria.
- **L'excentricitat:** és la relació que hi ha entre la meitat de la longitud de la distància focal i la meitat de la longitud de l'eix real. Com que c > a, l'excentricitat és més gran que la unitat.

$$\boxed{e = \frac{c}{a} \qquad e > 1}$$

Equació reduïda

L'equació redu ïda d'una hipèrbola centrada en l'origen de coordenades, en què el eix focal coincideix amb l'eix d'abscisses i l'eix imaginari, amb l'eix d'ordenades, s'anomena equaciò redu ïda de la hipèrbola.

- **Si els focus están situats a sobre el eix de abscisses**
  Donats P(x,y), un punt qualsevol de la hipèrbola, i les coordenades dels focus, els punts F'(-c,0), F(c,0), per definició:

  $$\overline{PF'}-\overline{PF}=2a \quad \text{o bien} \quad \overline{PF'}-\overline{PF}=2a$$

  Suposem que per al nostre punt P es compleix la primera igualdat. (Si es complís la segona arribaríem al mateix resultat).

  Aplicant-hi la fórmula de la distància entre dos punts, les longituds dels segments es poden expressar de la forma següent:

  $$\overline{PF'}=\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

  $$\overline{PF}=\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

  Substitu ïm i ens queda:

  $$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

  o bé

  $$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}+2a$$

  Elevem al quadrat els dos membres de l'equació

  $$(x+c)^2+y^2=(x-c)^2+y^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2$$

  Simplifiquem i a ïllem el radical:

  $$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=cx-a^2$$

  Elevem al quadrat:

  $$a^2\left[x^2-2cx+c^2+y^2\right]=c^2x^2-2a^2cx+a^4$$

  Tenim en compte que $b^2=c^2-a^2$, obtenim:

  $$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

Dividint per a^2b^2 :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \textit{equació reduïda de la hipèrbola}}$$

- **Si els focus están situats a sobre l'eix d'ordenades,** l'equació queda:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1}$$

Exemple

1. *Escriu l'equació reduïda de la hipèrbola d'eix real 8 m. i d'excentricitat 5/4.*

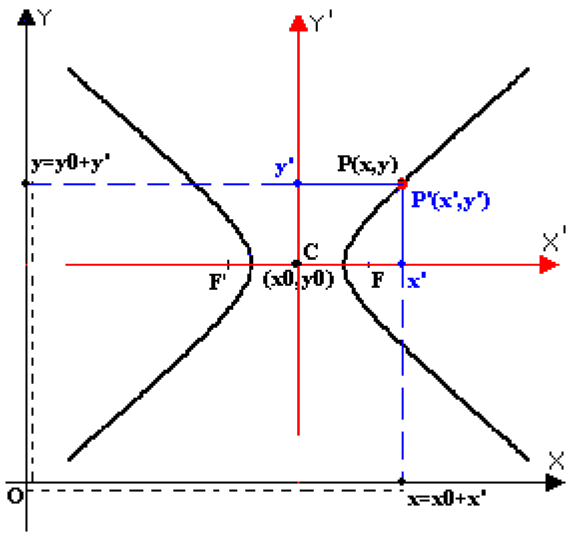
   Com que $2a = 8 \Rightarrow a = 4$

   Com $e=\frac{5}{4}=\frac{c}{a}$, es té que $c=\frac{5}{4}\cdot 4=5$, per tant $b=\sqrt{5^2-4^2}=3$

   L'equació reduïda és :

   $$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

Equació de la hipèrbola d'eixos paral.lels als eixos de coordenades



Anem a treballar amb una hipèrbola amb els seus eixos paral·ls amb els eixos de coordenades i de centre un punt diferent de l'origen de coordenades.
Sigui $C(x_0,y_0)$, el centre.

Si transladem els eixos de coordenades paral·lelament de forma que l'origen de coordenades sigui el punt C, l'equació de la hipèrbola referida a aquests eixos és:

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1$$

Com que les equacions de translació són:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{array}\right\}$$

Resulta que l'equació de la hipèrbola és:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}$$

Aquesta expressió és la d'una hipèrbola amb els focus situats a l'eix d'abscisses.
Si els focus están situats a l'eix d'ordenades, l'expressió de la hipèrbola és:

$$\boxed{\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1}$$

Equació general

Partint de l'expressió

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Operem per obtenir l'equació general de la hipèrbola:

Multipliquem els dos membres de l'equació per $a^2 \cdot b^2$:

$$b^2\ (x\text{-}x_0)^2\text{-}\ a^2\ (y\text{-}y_0)^2= a^2\cdot b^2$$

Desenvolupant els quadrats i aplicant la distributiva:

$$b^2 \cdot x^2 - 2b^2\cdot x\cdot x_0 + b^2\ x_0^{\ 2} - a^2 \cdot y^2 + 2a^2\cdot y\cdot y_0 - a^2\ x_0^{\ 2}= a^2\cdot b^2$$

Transposem termes i associem:

$$b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 - 2b^2\ x_0\ x + 2a^2\ y_0\ y + (b^2\ x_0^{\ 2} - a^2\ x_0^{\ 2} - a^2\cdot b^2)=0$$

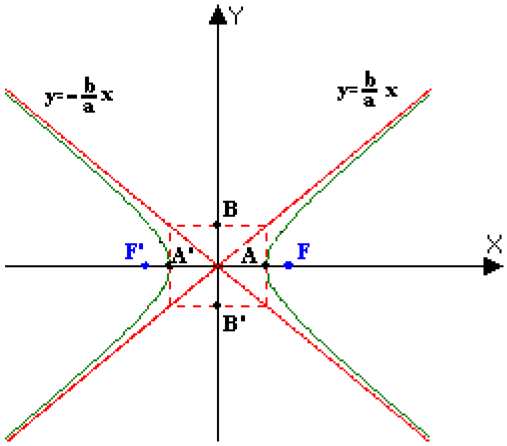
Anomenant A= b^2, B= $-a^2$, C= $-2b^2$, D= $2a^2\ y_0$, E= $b^2\ x_0^{\ 2} - a^2\ x_0^{\ 2} - a^2\cdot b^2$, l'expressió anterior queda:

$$\boxed{A\ x^2 + B\ y^2 + C\ x + D\ y + E = 0 \quad \textit{equació general de la hipèrbola}}$$

Observar que els valors A i B, en aquesta equació, tenen diferent signe.

Asímptotes

Si pels vèrtexs A', i A dibuixem les perpendiculars a l'eix de les abscisses i pels vèrtexs B(b,0) i B'(-b,0), les perpendiculars a l'eix de les ordenades, s'obté un rectangle que té les dimensions 2a i 2b. Les diagonals d'aquest rectangle són les rectes que passen per l'origen de coordenades i pels punts (a, b) i (a, -b), respectivament.



Les seves equacions són:

$$y = \frac{b}{a}x \qquad y = \frac{-b}{a}x$$

Aquestes rectes reben el nom d'**asímptotes de la hipèrbola.**

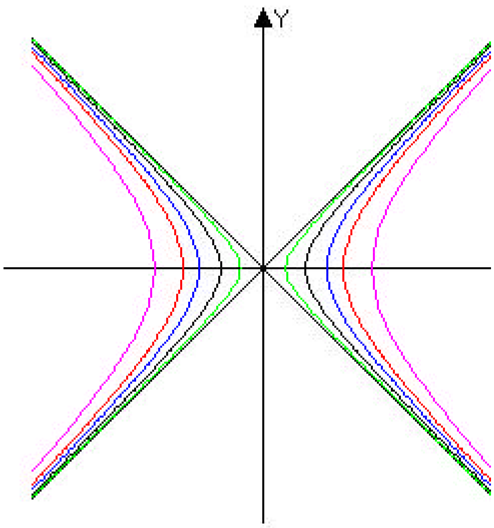
Hipèrbola equilàtera

S'anomena hipèrbola equilàtera a la hipèrbola que té iguals els dos semieixos. És a dir: a=b.

En la equació reduï da substitui m b per a i obtenim l'equació d'un hipèrbola equilàtera:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \;\Rightarrow$$

$$\boxed{x^2 - y^2 = a^2 \quad \textit{equació reduïda d'una hipèrbola equilàtera}}$$



Les equacions de les asímptotes s'obtenen substituint b per a en les equacions de les asímptotes de la hipèrbola:

$$y = \frac{b}{a}x \;\Rightarrow y = \frac{a}{a}x \;\Rightarrow\; \boxed{y = x}$$

$$y = \frac{-b}{a}x \;\Rightarrow y = \frac{-a}{a}x \;\Rightarrow\; \boxed{y = -x}$$

Aquestes asímptotes coincideixen amb les bisectrius del primer i segon quadrants.