- **NATURALS:** apareixen per la necessitat de comptar objectes i per això els naturals són el conjunts dels carinals dels conjunts.

  La notació que s'acostuma a utilitzar per referir-se al naturals és $\mathbb{N}$.
  Així tenim que $\mathbb{N}=\{1,2.3.4,\dots\}$; amb tot, sovint s'hi afegeix el nombre 0 que és el cardinal del $\varnothing$, amb el que $\mathbb{N}=\{0,1,2.3.4,\dots\}$

  Suma:
  Amb el naturals podem realitzar una operació que definim en la forma:
  A i B conjunts amb cap element comú ($A \cap B = \varnothing$)
  m = card(A) i n =card(B)
  definim m + n = card($A \cup B$).
  És clar que aquesta suma és

  associativa m+(n+p)=(m+n)+p
  commutativa m+n=n+m
  té element neutre m+0=m
  però no té element oposat

  amb el que algunes equacions com la 5 + X = 2 no tenen solució a $\mathbb{N}$ i ens veiem amb la necessitat d'ampliar el nostre conjunt numèric.

- **ENTERS:** Per tal de que la resta de nombres sempre és significativa, cal ampliar **N** i així néi el conjunt d'enters, que indiquen per $\mathbb{Z}$ i que en el fons no és altra cossa que els naturals amb un signe

$$\mathbb{Z}=\{\dots,-2,-1,\ 0,1,2,\dots\}$$

És clar que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ amb el que hem ampliat el nostre conjunt numèric i pel que fa a la operació **suma** aquest conjunt té les propietats:

associativa m+(n+p)=(m+n)+p
commutativa m+n=n+m
té element neutre m+0=m
té element oposat ja que per qualsevol m enter, existeix l'enter -m de manera que m+(-m)=0.

Amb el que tota equació d'enters amb sumes té solució.

Introduïm ara un altra operació entre enters, que en diem **producte** i la definim com $\mathrm{m}\cdot\mathrm{n}=\overbrace{m+m+\dots+m+m}^{|n|}$ que té signe + si m i n tenen el mateix signe i té signe - si m i n tenen signes diferents.

Le propietats que té aquesta operació són:

associativa m·(n·p)=(m·n)·p
commutativa m·n=n·m
té element neutre m·1=m
distributiva respecte la suma m·(n+p)=m·n + m·p
però no té element invers i les equacions m·X=n no sempre tenen solució i necessitarem ampliar el nostre conjunt numèric.

- **RACIONALS:** Per aconseguir que el producte tingui inversa, hem d'ampliar el nostre conjunt de números i ho fem amb el que en diem els nombres racionals o trencats que notarem en la forma $\mathbb{Q}$ i definim com

$$\mathbb{Q} = \left\{\left[\frac{a}{b}\right]; amb\ a, b \in \mathbb{Z}\ i\ b \neq 0\right\}$$

on $\left[\frac{a}{b}\right]$ són totes les fraccions a les equivalents entre elles, és a dir $\left[\frac{a}{b}\right] = \left\{\frac{c}{d}\middle| a \cdot d = b \cdot c\right\}$, que en diem una classe d'equivalència que ve representada per qualsevol dels seus elements, però per raons practiques acostumem a prendre sempre un representant amb denominador positiu i que sigui irreductible, numerador i denominador primers entre ells.

Amb aquesta notació és clar que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ ja que en hi ha prou en prendre denominador 1.

Recordem també que els nombres racionals es poden expressar com a nombres decimals on la part decimal és periòdica.

Les operacions que fem amb els racionals són:

Suma: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$ que té les propietats

associativa : $\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}$

commutativa $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$

té element neutre $\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$

té element oposat ja que per qualsevol $\frac{a}{b}$, existeix $\frac{-a}{b}$

$$\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = 0$$

I per tant $\mathbb{Q}$ amb la suma és un grup abelià.

Producte: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ que té les propietats

associativa : $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f}$

commutativa $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$

té element neutre $\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$

té element invers ja que per qualsevol $\frac{a}{b} \neq 0$, existeix $\frac{b}{a}$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

distributiva respecte la suma $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$

I per tant $\mathbb{Q}$ amb la suma i el producte és un cos i tota equació en la forma $a \cdot X = b$ amb $a, b \in \mathbb{Q}$ i $a \neq 0$ té solució.

Amb tot amb els nombres racionals no en hi ha prou. Ja que ens trobem en nombres que no són racionals, per exemple $\sqrt{2}$.

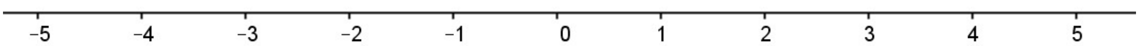
❖ **Proposició:** $\sqrt{2}$ *no es racional.*
Ja que:
Suposem que $\sqrt{2}$ és racional., llavors el podrem expressar amb una fracció irreductible com a quocient de dos nombres enters $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ amb a i b primers entre ells.
Si elevem els dos membres al quadrat tenim que $2 = \frac{a^2}{b^2}$ i per tant la fracció $\frac{a^2}{b^2}$ és reduïble. (1)
Però com $a^2 = a \cdot a$, els factors de a^2 són els mateixos que els de a i com $b^2 = b \cdot b$, els factors de b^2 són els mateixos que els de b ; amb el que si $\frac{a}{b}$ és irreduible, $\frac{a^2}{b^2}$ també és irreduible; fet que entra en contradicció amb (1) .
Per tant suposar que $\sqrt{2}$ és racional, ens porta a una contradicció.
Podem, afirmar que $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ ***no es racional.***

❖ **Més exemples de nombres no racionals.**

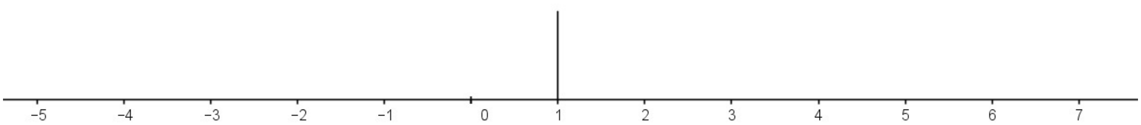
- Les arrels quadrades de nombres naturals el resultat no és un nombre enter són irracionals.
- Suma, resta, multiplicació i divisió combinant racional i nombres irracionals són irracionals. (Excepte quan multipliquem per 0).
- El nombre π. Encara que els grecs ja sospitaven que π no era racional és no va poder demostrar fins al segle XII

❖ **Gràfiques de representació de nombres irracionals**
Sabem que a cada nombre racional el podem representar gràficament, ja que li correspon un punt de la recta; però a cada punt de la recta li correspon un nombre racional? Sí això fos cert, recta estaria completa amb els nombre racionals i no es podria representar-hi els nombres no racionals.
Veurem ara com podem representar $\sqrt{2}$ a la recta.

Tracem una recta i a ella hi dibuixem els enters.

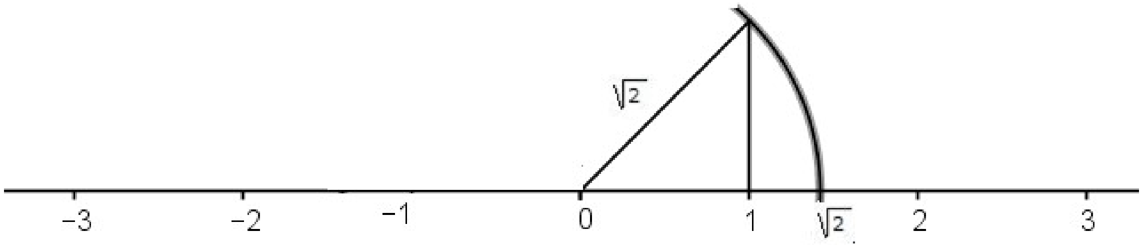


A l'enter 1 hi dibuixem un segment perpendicular a la recta que tingui longitud 1.



Si ara unim el punt 0 amb l'extrem d'aquest segment, se'ns forma un triangle rectangle on els dos catets tenen longitud 1, i per tant gracies al teorema de Pitàgores poden afirmar que la longitud de la hipotenusa és $\sqrt{2}$.

Finalment, amb l'ajuda d'un compàs, passem $\sqrt{2}$ a la recta.



- **REALS:** Entendrem com a nombres reals a aquells nombres que admeten una representació decimal i els designarem com a $\mathbb{R}$.
  És clar que els nombres decimals els podem representar sobre la recta i que per tant els nombres reals els podem representar sobre la recta.
  I que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

- **ESQUEMA**

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\,als \begin{cases} Racionals \begin{cases} Enters \begin{cases} Naturals \\ Enters\ negatius\ i\ 0 \end{cases} \\ Fraccionaris \begin{cases} Decimale\ exactes \\ Decimales\ periódics \begin{cases} Purs \\ Mixtes \end{cases} \end{cases} \end{cases} \\ Irracionals \end{cases} \end{cases}$$

- **OPERACIONS AMB NÚMEROS REALS. PROPIETATS**
  - **Suma:** donats a,b,c $\in \mathbb{R}$
    - a+b$\in \mathbb{R}$
    - **Associativa:** (a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c
    - **Commutativa:** a·b = b·a
    - **Existència d'element neutre (0):** a+0=a
    - **Existència d'element oposat:**
      $\forall a \in \mathbb{R}$ existeix $-a \in \mathbb{R}$ de manera que a+(-a)=0

- **Producte:** $a,b,c \in \mathbb{R}$
  - $a \cdot b \in\in \mathbb{R}$
  - **Associativa:** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
  - **Commutativa:** $a \cdot b = b \cdot a$
  - **Existència d'element neutre (1):** $a \cdot 1 = a$
  - **Existència d'element invers:**
    $\forall a \neq 0$ existeix $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ de manera que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$
  - **Distributiva del producte respecta lasuma:**

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \implies a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

ORDRE A $\mathbb{R}$

El fet que poguem representar sobre la recta als nombres real ens permet establir un ordre als reals en la forma:

- **Definició**
  Donats $a, b \in \mathbb{R}$, diem que **a es menor que b** i ho escrivim **a<b**, si al representar-los sobre la recta a queda situat a la esquerra de b.

  Que és equivalent a
  $\forall\ a, b \in \mathbb{R},\ a \le b \Leftrightarrow b-a \ge 0$

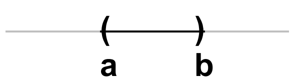
- **És una relació d'ordre ja que:**
  - **Reflexiva:** $\forall\ a \in \mathbb{R} \Rightarrow a \le a$
  - **Antisimètrica:** $\forall\ a, b \in \mathbb{R},\ a \le b$ y $b \le a \Leftrightarrow a = b$
  - **Transitiva:** $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$, si $a \le b$ y $b \le c \Rightarrow a \le c$
  - **Relació de ordre total:** $\forall\ a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a<b$ o $a>b$ o $a=b$

- **Operacions y ordre**
  - **Monotonia de la suma:** $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$, si $a \le b \Rightarrow a+c \le b+c$
  - **Propietat de inversió:** $\forall\ a, b \in$ **R, si** $a \le b \Rightarrow 1/a \ge 1/b$
  - **Monotonia del producte:** $\forall\ a, b, c \in$ **R**:
    a) Si $c>0$: $a \le b \Rightarrow a \cdot c \le b \cdot c$
    b) Si $c<0$: $a \le b \Rightarrow a \cdot c \ge b \cdot c$

INTERVALS I ENTORNS

- **Intervals**
  Como $\mathbb{R}$ es un conjunt ordenat, podem parlar de tots els nombres que estan entre dos reals concrets; d'aquest conjunt de nombres en diem interval.
  - **Tipus d'intervals:**
    Siguin a i $b \in\in \mathbb{R}$ t.q. $a<b$, anomenem::
    - **interval obert d'extrems a i b** i es representa com **(a,b)** o **]a,b[**, al conjunt de tots els números reals compresos entre a i b, sense i incloure els extrems.

$(a,b)=]a,b[=\{x \in \mathbf{R};\ a<x<b\}$



- **interval tancat d'extrems a i b** i es representa com **[a,b],** al conjunt de tots els números reals compresos entre a i b inclosos els extrems.

[a,b]={x∈**R**; a≤x≤b}

- i**nterval semiobert o interval semitancat d'extrem a i b** al conjunt de tots els números reals compresos entre a i b, inclòs l'extrem tanacat i exclòs l'obert.

[a,b)={x∈**R**; a≤x<b}

(interval tancat per l'esquerra i obert per la dreta)

(b,a]={x∈**R**; a<x≤b}

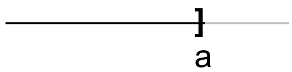
(interval obert per l'esquerra i tancat per la dreta)

- **intervals infinits**

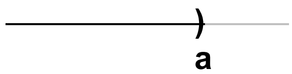
[a,+∝)= {x∈**R**; x≥a}

(a,+∝)= {x∈**R**; x>a}

(-∝,a]={x∈**R**; x≤a}



(-∝,a)={x∈**R**; x<a}

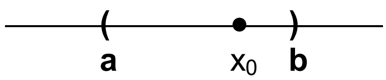


✓ En particular $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

❖ **Entorn**

Concepte:

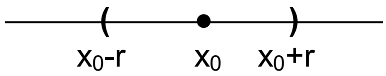
Considerem $x_0 \in \mathbb{R}$, anomenem **entorn de x_0** a qualsevol conjunt E que contingui un interval obert en el qual hi estigui x_0 .



Casos particulars:

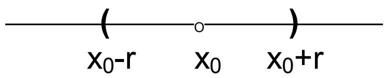
- Anomenem **Bola oberta de centre x_0 i radi r>0** i se representem per **$E_r(x_0)$,** a l'interval obert d'extrems x_0-r i x_0+r, es a dir

$E_r(x_0)=(x_0-r, x_0+r)$



- Anomenem entorn reduït **de centre x_0 i radi r** i representem per **$E_r^*(x_0)$** al conjunt:

$E_r^*(x_0)=(x_0-r,x_0+r)\setminus\{x_0\}$



➢ **Operacions amb intervals**

- **Unió:** Si I_1 i I_2 són dos intervals se definim la unió de I_1 i I_2 i es representa com $I_1 \cup I_2$ al conjunt $I_1 \cup I_2=\{x;\ x \in I_1 \vee x \in I_2\}$

- **Intersecció:** Si I_1 i I_2 són dos intervals se definim la intersecció de I_1 i I_2 i representem per $I_1 \cap I_2$ al conjunt $I_1 \cap I_2 =\{x;\ x \in I_1 \wedge x \in I_2\}$

- **Complementari:** Si I_1 és un interval, diem que l'interval I_2 es el seu complementari si $I_1 \cup I_2= \mathbb{R} \wedge I_1 \cap I_2=\varnothing$

- **Diferencia:** Donats I_1 e I_2 dos intervals definim la diferencia de I_1 i I_2, i la representem com $I_1 \setminus I_2$, com el conjunto $I_1 \setminus I_2=\{x;\ x \in I_1 \wedge x \notin I_2\}$

❑ **VALOR ABSOLUT**

$$x \epsilon \mathbb{R}\ |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

❖ **Propietats**

- $\forall\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow |x|>0$

- $\forall\ x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

- **Desigualtat triangular**
  $\forall\ x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |x+y| \leq |x|+|y|$

APROXIMACIÓ DE NOMBRES REALS

Com molts nombres reals tenen infinits decimals, sovint hem de treballar amb aproximacions; de les aproximacions que són menors al valor exacte del nombre, diem que són aproximacions per defecte, mentre les que són majors al nombre aproximat diem que són per excés.
Quan aproximem un nombre decimal, anomenem ordre l'aproximació al nombre de xifres decimals de l'aproximació.

MÈTODES D'APROXIMACIÓ

- **Aproximació d'ordre n per arrodoniment:** substituïm por zeros totes las xifres següents a la d'ordre n. Si la primera xifra substituïda es major o igual a 5 augmentem en una unitat la última xifra no nul·la.
- **Aproximació d'ordre n per truncament:**
  a) Si es un nombre enter, substituïm per zeros totes les xifres següents a la de l'ordre desitjat .
  b) Si es un nombre decimal, eliminem les xifres següents a les de l'ordre volgut.

Exemples

- π=3,141592...
  Aproximació d'ordre 2 (fins les centèsimes) por defecte: 3,12 (<π)
  Aproximació d'ordre 3 (fins les mil·lèsimes) por excés: 3,141 (>π)

  Aproximació d'ordre 3 por arrodoniment: 3,142
  Aproximació d'ordre 3 por truncament: 3,141

- Aproximació (fins les centenes) o d'ordre 3 per arrodoniment del nombre 71360: 71400

- Aproximació (fins les centenes) o d'ordre 3 per truncament del nombre 71360: 71300

ERRORS

Quan treballem amb aproximacions de nombres reals estem realitzant un error que hem de conèixer per tal de controlar-lo.

- **Error absolut E_a:** es la diferencia en valor absolut del nombre i la seva aproximació.
  $E_a=|A-a|$, on A es el nombre real i a la seva aproximació.
- **Error relatiu E_r:** es el quocient entre l'error absolut y el valor absolut del valor exacte del nombre.

$$E_r = \frac{E_a}{|A|}$$

Cota de l'error

Sovint no podem saber quin és el valor exacte de l'error, per exemple quan aproximem un nombre irracional, i el que ens interessa és poder garantir que l'error és menor a una quantitat concreta, que en diem cota superior de l'error.

- **Cotes de l'error absolut**
  Si considerem el nombre π i l'aproximem per 3.141. no podem dir exactament l'error comés, ja que això voldria dir que podem escriure tots els decimals de π, però si podem garantir que l'error és menor a 0.001 doncs com π val π=3.1415926... , podem acotar l'error per E_a=|3.1415926...-3.141|=0,0005926...<0.001 .
  En general podem afirmar que l'error absolut que realitzem al fer una aproximació decimal serà sempre menor a una unitat de l'ordre d'aproximació.

  Observació: si fem una aproximació per arrodoniment, podem donar una millor cota d'error; a l'exemple anterior l'aproximació de π amb tres decimals seria π=3.142 per arrodoniment, la cota d'error seria *:*
  |3.1415926...-3.142|=0.0004074...<0.0005
  En general quan fem una aproximació per arrodoniment, la cota d'error és menor o igual mitja unitat de l'ordre d'aproximació.

- **Cotes de l'error relatiu.**
  Per trobar la cota de l'errornrelatiu, en hi ha prou en fer el quocient de la cota d'error absolut i una aproximació per defecte del nombre aproximat.
  Així quan aproximem π per 3.141, la cota de l'error relatiu és $\frac{0.001}{3.141} = 0.000315 < 0.0004$.

- **Propagació de l'error**
  Quan operem reals a partir de les seves aproximacions, l'error que teníem a cada aproximació es va propagant i si fem una
  - suma (o diferencia), las cotes d'error absolut es sumen.
  - producte (o quocient), las cotes de error relatiu es sumen.

- **NOTACIÓ CIENTÍFICA**

Diem que un nombre real x està expressat en notació científica, quan el donem escrit en la forma $x=a\cdot 10^n$ on $n\in \mathbb{Z}$ i $1\leq a<10$.
La notació científica es de gran utilitat per a expressar números mol grans o molt petits, i realitzar productes i quocients en notació científica és immediat.

Exemples
$0,000056=5,6\cdot 10^{-5}$; $6\ 250\ 000\ 000\ 000=6,25\cdot 10^{12}$
$4,2\cdot 10^{-5}\cdot 2\cdot 10^{-6}=8,4\cdot 10^{-11}$; $(4,2\cdot 10^{-5}):(2\cdot 10^{-6})= 2,1\cdot 10$

- **POTENCIES**

- **Potencies d'exponent natural**

  Si $a\in \mathbb{R}$, $a>0$ i $n\in\mathbb{N}$, definim : $a^n = a\cdot a\cdot\ldots\cdot a$ (n factors)

- **Potencies d'exponent enter**

  Si $a\in \mathbb{R}$, $a>0$ i $n\in\mathbb{Z}$, definim : a^n com:

  $a^n = a\cdot a\cdot\ldots\cdot a$ quan $n>0$

  $a^n=1$ per $n=0$

  $a^n=1/a^{-n}$ quan $n<0$

- **Propietats de les potencies**

  Sean $a, b\in \mathbb{R}$, $a,b>0$ $n,m\in \mathbb{Z}$, se compleixen les següents propietats:

  - $a^n\cdot a^m = a^{n+m}$
  - $a^n:a^m = a^{n-m}$, $a\neq0$
  - $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$
  - $(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n$
  - $(a:b)^n = a^n:b^n$, $a\neq0$

- **RADICALS**

  Si $a, b\in \mathbb{R}$ $a, b>0$ i $n\in\mathbb{N}$ $n\neq0$, definim:

  $$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$$

  I es llegeix com arrel n-èssima de a, **n** rep el nom de índex de l'arrel i **a** és el radicand.

  Com $(a^{1/n})^n = a^{n/n} = a^1 = a$ sovint expressem $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

  i en general $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

- **EQUIVALENCIA DE RADICALS**

  Diem que dos radicals són equivalents quan representen el mateix valor numèric i els seus índex són diferents.

  Observeu que si multipliquem l'índex de l'arrel i l'exponent del radicand pel mateix nombre no nul, aconseguim un radical equivalent al primer.

  $\sqrt[n]{a^m}$ i $\sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}$ i $\sqrt[n/p]{a^{m/p}}$ són radicals equivalents .

  Aquest fet ens permet simplificar radicals i reduir-los a un índex comú.

- **OPERACIONS AMB RADICALS**
- **Radical d'un producte**

  $\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

- **Radical de un quocient**

  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

- **Potencia d'un radical**

  $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

- **Radicació d'un radical**

  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

- **Suma de radicals**

  Cal anar en compte al hora de sumar radicals ja que en general sols es poden sumar si són **semblants** (tenen el mateix índex i el mateix radicand) i realitzar

  $$p \cdot \sqrt[n]{a} + q \cdot \sqrt[n]{a} = (p+q) \cdot \sqrt[n]{a}$$

- **RACIONALIZACIÓ DE DENOMINADORS**

  Racionalitzar una fracció amb radicals en el denominador consisteix en trobar-ne un altra fracció equivalent a la inicial, però sense radicals en el denominador.

- **Fraccions del tipus $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$**

  multipliquem numerador i denominador per $\sqrt{b}$:

  $$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

- **Fraccions del tipus $\dfrac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$, amb $m < n$**

  multipliquem numerador i denominador per $\sqrt[n]{b^{n-m}}$:

  $$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m} \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

- **Fraccions del tipus $\dfrac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$**

  multipliquem numerador i denominador per la expresió conjugada del denominador:

  $$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a \cdot (\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c}) \cdot (\sqrt{b}-\sqrt{c})} = \frac{a \cdot (\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2 - (\sqrt{c})^2} = \frac{a \cdot (\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$$

- **LOGARITMES**

Si tenim a i b nombres reals estrictament positius i a diferent de 1, anomenem logaritme en base a de b $\log_a b$ a l'exponent x amb que cal elevar la base a per que ens doni b,

$a,b>0$ i $a \neq 1$ $x=\log_a b \Leftrightarrow a^x = b$

- **Exemples**

$\log_2 8=3$ (ja que $2^3=8$)
$\log_3 81=4$ (ja que $3^4=81$)
$\log_{1/2} 32=-5$ (ja que $(1/2)^{-5}=32$

- Dels logaritmes en base 10 en diem **logaritmes decimals** i s'expressen com **log b**.
- Un altra base de logaritmes molt utilitzada és la base el número **e** i acostumem a dir-ne **logaritme neperià** i l'escrivim com **ln b**.

PROPIETATS

- **$\log_a a=1$** doncs $\log_a a=x \Leftrightarrow a^x=a \Leftrightarrow x=1$
- **$\log_a 1=0$** ja que $\log_a 1=x \Leftrightarrow a^x=1 \Leftrightarrow x=0$
- **$\log_a a^x=x$** doncs : $\log_a a^x=y \Leftrightarrow a^x=a^y \Leftrightarrow x=y$
- **Logaritme d'un producte és la suma dels logaritmes.**

$\log_a (b\cdot c) = \log_a b + \log_a c$ essent b i c >0.
ja que:
S i $x = \log_a b$ i $y= \text{lob}_a c \Rightarrow a^x=b$ i $a^y=c$
multiplicant $b\cdot c = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.
I per la definició de logaritme $\log_a(b\cdot c)= x+y$.

- **Logaritme d'un quocient és la diferència dels logaritmes.**

$\log_a (b/c) = \log_a b - \log_a c$ essent b i c >0.
ja que:
S i $x = \log_a b$ i $y= \text{lob}_a c \Rightarrow a^x=b$ i $a^y=c$
dividint $b/c = a^x / a^y = a^{x-y}$.
I per la definició de logaritme $\log_a(b/c)= x-y$.

- **Logaritme d'una potencia és l'exponent pel logaritme de la base de la potència**

$\log_a b^r = r\cdot\log_a b$, on $b\in R^+$ i $r\in R$
doncs
Si $x=\log_a b \Rightarrow a^x = b$.
Elevant a r $b^r = (a^x)^r = a^{x\cdot r} = a^{r\cdot x} \Rightarrow \log_a b^r = r\cdot x$
és a dir $\log_a b^r = r\cdot\log_a b$

- **Canvi de base** $\mathbf{\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}}$

  ja que
  Si $x = \log_a c$ i $y = \log_b a \Rightarrow a^x = c$ i $b^y = a \Rightarrow$
  $c = a^x = (b^y)^x = b^{x\cdot y} \Rightarrow \log_b c = x\cdot y$
  és a dir $\log_b c = \log_a c \cdot \log_b a$

  i passant $\log_b a$ dividint a l'altre membre obtenim $\mathbf{\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}}$.