



Col·legi Maristes Sants-Les Corts

Departament de matemàtiques

Matemàtiques – II

PsPc. B2.A1

Tal i com alguns de vosaltres m'heu demanat, us dono una col·lecció de problemes per ajudar-vos a preparar la prova de modificació de nota.

No és, ni ho pretén ser, un recull exhaustiu dels problemes fets durant l'avaluació; sols vol donar-vos un cop de mà per revisar el temari.

Com sempre el més important és com feu els problemes, les explicacions i raonaments que utilitzeu per plantejar-los i resoldre'ls.

Jaume

- 1.- Trobeu els valors de a, b i c sabent que la funció $f(x) = \frac{ax+b}{cx+3}$ té per asímptotes les rectes $x = \frac{-1}{2}$ i $y = \frac{3}{2}$ i que la seva tangent en el punt d'abscissa -1 és la recta $7x + y + 9 = 0$.
- 2.- Raoneu l'existència de solucions de l'equació $6x^3 + x^2 = 5 - x$.
En el cas que existeixin aproximeu-ne una amb un error menor a una dècima.
- 3.- Podem garantir l'existència de solucions de l'equació $1 + \cos x = x$ a l'interval $[-2,2]$? En cas afirmatiu, doneu una solució amb un error menor a una dècima.
- 4.- Considerem la funció $f(x) = \sqrt{x-1}$, trobeu l'equació de la recta tangent a $y=f(x)$ en el punt d'abscissa 10.
- 5.- Calculeu els valors del paràmetre a, $a \neq 0$, que fan que les tangents a la corba d'equació $y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1512$ en els punts d'inflexió són perpendiculars.
- 6.- Sabem que la corba $y = ax^3 + bx^2 + cx$ és creixent i amb tangent horitzontal en $x=1$, mentre que la seva tangent en $x = -1$ forma un angle de $\pi/4$ amb l'eix de les abscisses. Determineu a, b i c.
- 7.- Considerem la funció $f(x) = \begin{cases} \frac{b \cdot \sin(2x)}{x} & x < 0 \\ \frac{a \cdot x - a}{x^2 + x + 1} & x \geq 0 \end{cases}$.



Trobeu els valors de a i b que fan que f sigui contínua a tots els reals i que la seva tangent en el punt d'abscissa 1 sigui paral·lela a la recta $2y = x$.

8.- Donada la funció $y = \frac{5}{1+x^2}$ trobeu l'equació de tangents que passen per $(0,5)$.

9.- Trobeu l'equació de les rectes tangents $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 7$, que passen pel punt de coordenades $(-4, -9)$.

10.- Donada la funció $y = x^3 - 4x + 5$, trobeu l'equació de les tangents a aquesta funció que passen pel punt de coordenades $(2,5)$.

11.- Considerem la família de funcions $y = \frac{e^{-x}}{3 - ae^x} + b$ que depenen de a i b .

Trobeu per quins valors de a i b s que les rectes $x = 2$ i $y = 5$ li són asímptotes

Per aquests valors de a i b , estudeu el seu creixement i extrems.

12.- Considerem la funció $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$, estudeu-ne els seus màxims i mínims i els intervals de creixement.

Observant els extrems i el creixement d'aquesta funció, que en podem afirmar de les solucions de l'equació $x^3 + 3x^2 - 5 = 0$.

13.- Considerem la funció $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3$.

a) Raoneu que com a mínim té un zero real.

b) Estudiant-ne el creixement i extrems, raoneu que té un únic zero.

c) Aproximeu-lo amb un error menor a una dècima.

14.- Estudieu la continuïtat de la funció $f(x) = \begin{cases} a \cdot e^x & x \leq 0 \\ b + a \cdot \sin x & x > 0 \end{cases}$.

Quina relació tenen a i b quan la funció és contínua a tots els reals?

Per quins valors de a i b la funció $y = f(x)$ és derivable en el punt 0 i la tangent en el punt d'abscissa 0 és paral·lela a la recta $6x - y = 2$.

15.- Trobeu els valors de a i b , sabent que la funció $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} - b & x \geq 1 \\ b(3x+2)^2 + x & x < 1 \end{cases}$

és contínua a tots els reals i que $f'(-1) = -11$

Per aquests valors de a i b , estudeu la derivabilitat de f , i trobeu la seva derivada.

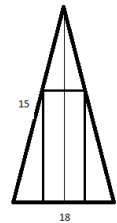


- 16.- Enuncieu el teorema dels increments finits. Apliqueu-lo, si es pot, a la funció $y = 3 \ln x^3$ i l'interval $[1, e^4]$.
- 17.- Trobeu, si es pot, el punt predit pel teorema dels increments finits a la funció $y = \frac{x^2}{3x-4}$ a l'interval $[2, 4]$.
- 18.- Raoneu que es pot aplicar el teorema dels increments finits a la funció $y = x^2 e^{1-x^2}$ a l'interval $[-1, 1]$ i doneu el punt predit pel teorema.
- 19.- Estudieu si és aplicable el teorema de Cauchy a les funcions $y=2x$ i $y=\ln x$ a l'interval $[1, e]$, en cas afirmatiu, calculeu el punt predit pel teorema.
- 20.- Estudieu les asímptotes de la funció $y = \frac{3e^x + 6}{2e^x - 3}$.
- 21.- Sigui $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció $f(x) = e^x (ax + b)$, on a i b són nombres reals.
a) Calculeu els valors de a i b per tal que tingui un extrem relatiu en el punt $(3, e^3)$.
b) Per aquests valors de a i b , digueu quin tipus d'extrem té la funció en el punt esmentat.
- 22.- Estudieu la concavitat de la funció $y = x^3 e^{2x}$.
- 23.- Donada la funció $f(x) = \frac{(2x+6)^2}{(2x+4)^2}$ trobeu-ne el seu domini i continuïtat, estudieu-ne les asímptotes el creixement i extrems, construïu-ne un esquema del seu gràfic.
- 24.- Donada la funció $y = \frac{x - 2e^x}{1 + e^x}$, estudieu-ne el creixement i els extrems, trobeu-ne les asímptotes i feu un esquema del seu gràfic.
- 25.- Determineu la diagonal mínima de tots els rectangles de 8 m de perímetre.
- 26.- Un triangle rectangle té una hipotenusa de 10m. Si el fem girar entorn d'un dels seus catets, obtenim un con. Calculeu entre quins valors varia el volum d'aquest con.



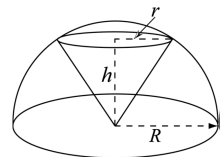
- 27.- Per tal de que pasturin les vaques, volem encercar un terreny en forma rectangular. Aprofitant la presència d'un riu, situarem un dels costats del terreny en el riu i no caldrà tancar-lo. Si el preu de la tanca és de 12 €/m i disposen de 450 €, trobeu les dimensions que hem de donar al terreny per tal de la superfície encerclada sigui la màxima possible.
- 28.- La paret de les golfes d'una casa té forma d'un triangle isòsceles amb una base de 6 m i una altura de 4 m. . Sobre aquesta paret, es vol construir una llibreria de forma rectangular. Quines mides haurà de tenir la llibreria per tal que la seva superfície sigui màxima?
- 29.- Busqueu les rectes de la família $y = 2ax + a^2$ que estan a distància mínima del punt (0,-1).
- 30.- Es disposa de 50 unitats d'un producte, cada una de les quals té un preu de sortida de 100 € unitat. Per cada 5 € que s'augmenta el preu, es perd un client, deteriorant-se una unitat del producte. Quin és el preu per unitat que més ingressos proporciona?

- 31.- Un triangle isòsceles té dos costats iguals de 15 cms cadascun i el costat desigual amida 18 cms. Dins aquest triangle, inscrivim un rectangle on un costat del rectangle reposa sobre el costat desigual del triangle. Entre quins valors variarà l'àrea del rectangle?

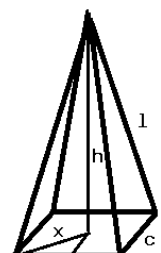


- 32.- D'entre tots els cilindres inscrits en una esfera de radi 1 m, trobeu el de major volum.
- 33.- Calculeu les dimensions d'un con inscrit en una esfera de radi 1 mm, si sabem que té volum màxim.

- 34.- En una semiesfera de radi R inscrivim un con situant el vèrtex al centre de la semiesfera. Trobeu les dimensions d'aquest con perquè el seu volum sigui màxim.



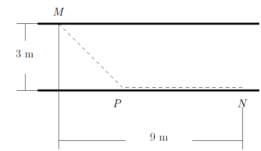
- 35.- Les quatre arestes laterals d'una piràmide recta de base quadrada tenen longitud 1. Digueu quin és el màxim volum que pot tenir la piràmide.





36.- Un magatzem té forma de prisma recte de base quadrada i volum 768 m^3 . Se sap que la pèrdua de calor a través de les parets laterals val 100 unitats per m^2 , mentre que a través del sostre és de 300 unitats per m^2 . La pèrdua pel sòl és molt petita i es pot considerar nul·la. Calculeu les dimensions del magatzem per a què la pèrdua de calor total sigui mínima.

37.- Volem unir el punt M en un cantó d'un carrer de 3 m d'amplada amb el punt N situat a l'altre cantó de carrer, i 9 m més avall, mitjançant dos cables rectes, un des de M fins a un punt P de l'altre cantó del carrer i un altre des de P fins a N seguint en el mateix cantó de carrer segons l'esquema.



El cost de la instal·lació del cable MP és de 12 € per metre i del cable PN de 6€ per metre.

Quin punt P haurem d'escollir de manera que la connexió de M amb N sigui el més econòmic possible? Quin serà aquest cost mínim?

38.- Trobeu una primitiva de $y = \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x} + 3x - \frac{\ln x}{x}$ que passi pel punt de coordenades (1,-e).

39.- Trobeu una primitiva de $f(x) = \frac{3x+3}{x^2+2x}$ que passi per (1, 2).