Grafs

Concepte de graf. Vèrtexs i arestes.

Entendrem per **graf** a un parell ordenat $G=(V,A)$, on V és un conjunt no buit d'elements que en diem vèrtexs i A és un subconjunt de parells no ordenats de vèrtexs; dels elements de A en diem arestes.

És dir:
G és un **graf** $\Leftrightarrow$ $G=(V,A)$, on $V \neq \emptyset$ i $A \subset \{X \in \wp(V) \mid \mathrm{card}(X) = 2\}$

Del número de vèrtexs que té un graf se'n acostuma a dir l'ordre del graf i mentre que del número d'arestes se'n diu la mida del graf.
ordre = Card(V) i **mida** = Card(A) .

Pseudograf, multigraf i digrafs.
Observeu que a la definició de graf que hem donat:

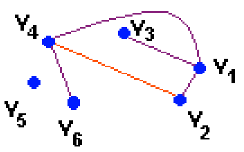
- les arestes no tenen direcció, és el mateix {u,v} que {v,u};
- no es contemplen arestes que vagin d'un vèrtex a ell mateix (**llaç**);
- entre dos vèrtexs no hi poden haver arestes diferents que els uneixin **(aresta múltiple)**.

Si necessitem contemplar aquestes opcions, parlarem de **pseudograf** si volem llaços, de **multigraf** si hi ha arestes múltiples i de **dígraf** per les arestes dirigides.

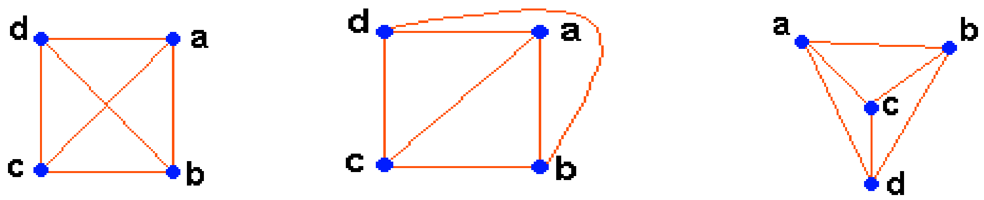
Representació gràfica

Per representar gràficament un **graf** , s'acostuma a identificar els vèrtexs amb punts i les arestes amb segments que uneixen els vèrtexs.

Així el graf definit per
$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ i $A=\{\{v_1,v_2\}, \{v_1,v_3\}, \{v_1,v_4\}, \{v_4,v_6\},\{v_4,v_2\}\}$ es pot representar com



Compte que un graf admet varies representacions gràfiques, ja que el que ens interessa són els vèrtexs i les seves connexions.
Així, algunes representacions del graf $V=\{a,b,c,d\}$ i $A=\{ab, ac, ad, bd, bc, bd, cd\}$ són:



Un graf diem que és **planar**, quan admet una representació gràfica en un pla, sense que les arestes s'encreuin. L'exemple anterior és un graf planar.

Concepte de grau

Diem que dos vèrtexs u i v són **adjacents** $\Leftrightarrow$ $\{u,v\} \in A$;
en aquest cas es diu que l'aresta uv, els **connecta** i que u i v en son els **extrems** i que l'aresta uv és incident al vèrtex u i al vèrtex v.

Un vèrtex que no sigui adjacent a cap vèrtex , diem que és un vèrtex aïllat o **isolat**.

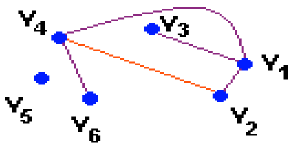
Dues arestes diem que són **adjacents** quan tenen un extrem comú.

Del nombre d'arestes que són incidents a un vèrtex v, en diem el **grau** del vèrtex, i acostumem a designar-lo com g(v).

Observeu que el grau d'un vèrtex, coincideix amb el número de vèrtexs que li són adjacents, és a dir $g(v) = \text{Card}\,(\{u \in V \mid uv \in A\})$.

amb el que : $0 \leq g(v) \leq$ ordre del graf-1 = card(V)-1.

Un graf on tots els seu vèrtexs tenen el mateix grau, en diem un graf **regular**.
Així en el graf $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ i $A=\{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_4v_6, v_4v_2\}$



tenim que $g(v_1)=3$, $g(v_2)=2$, $g(v_3)=1$, $g(v_4)=3$, $g(v_5)=0$ i $g(v_6)=1$
i no és un graf regular.

Propietat.

Donat un graf $G=(V,A)$ la suma dels graus dels vèrtexs d'un graf és el doble que el nombre d'arestes.
És a dir :
Si $G=(V,A)$ és un graf, $\sum_{v \in V} g(v) = 2 \cdot \text{Card}(A)$.

Ja que com a cada v vèrtexs hi arriben g(v) arestes tindrem que la suma dels graus dels vèrtexs serà el nombre d'arestes que arriben a algun vèrtex, com cada aresta té dos vèrtexs , cada aresta serà comptada dos cops; amb el que la suma dels graus dels vèrtexs serà el doble del número d'arestes.

Conseqüències immediates d'aquesta propietat són que:

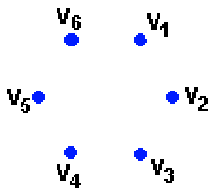
A un graf $G=(V,A)$
La suma dels graus de tots els vèrtexs és sempre parell.
Ja que Card(A) un nombre natural.

El nombre de vèrtexs de grau senar és parell.
Obvi ja que la suma imparell d'imparells seria imparella.

Exemples de grafs

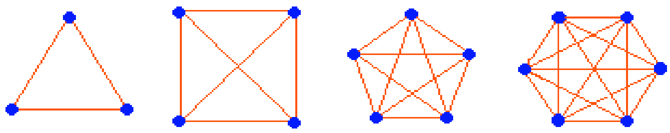
Graf nul

Graf **nul** d'ordre n, és un graf que té n vèrtexs i cap aresta .
El graf nul d'ordre 6 és:



Garf complert

D'un graf que tingui totes les arestes possibles, diem que és **complert**.
Es a dir $G=(V,A)$ és complert $\Leftrightarrow A = \{X\in \wp(V) \mid \text{card}(X) = 2\}$.
Exemples de graf complerts són K_3, K_4 , K_5 , K_6 .

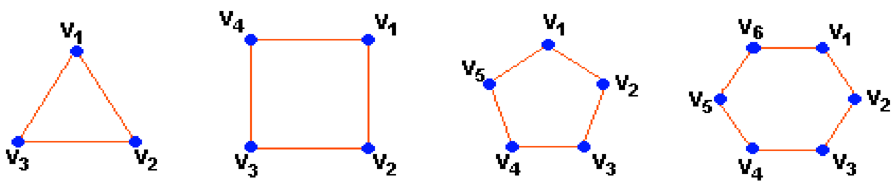


Observeu que: un graf complert és regular i la mida d'un graf complert d'ordre n és:

$$\text{Card(A)}=\binom{Card(V)}{2}=\frac{n\cdot(n-1)}{2}.$$

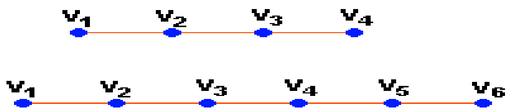
Graf cicle

Un graf **cicle** d'ordre n és un graf en la forma: $V=\{ v_1, v_2,.., v_n \}$ i $A=\{v_1v_2, v_2v_3,..,v_nv_1\}$
Els graf cicle l'ordre 3, 4, 5 i 6 serien:



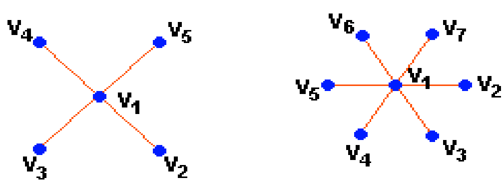
Graf trajecte

Direm que un graf és un graf **trajecte**, quan presenta la forma
$V=\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ i $A=\{v_1v_2, v_2v_3,...,v_{n-1}v_n\}$. Els graf trajecte d'ordre 4 i 6 serien



Grag estrella

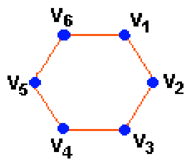
Diem que un graf és un graf **estrella**, quan presenta la forma
$V=\{ v_1, v_2, ..., v_n\}$ i $A=\{ v_1v_2, v_1v_3,...,v_1v_n\}$
Els graf estrella d'ordre 5 i 7 serien

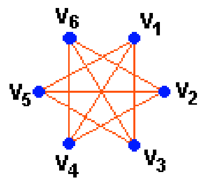


Operacions amb grafs

Complementari

Donat un graf G, definim el seu complementari com un graf amb els mateixos vèrtexs i de manera dos vèrtexs del complementari són adjacents $\Leftrightarrow$ no són adjacents a G.
Notarem el complementari de G com G^c.
Es a dir si $G=(V, A)$ $G^c=(V,\{uv|\ uv\notin A\})$.

Per exemple el complementari de 

és 

És fàcil de raonar que $(G^c)^c = G$.

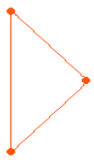
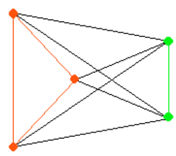
Unió de grafs

Si $G_1=(V_1,A_1)$ i $G_2=(V_2,A_2)$ són dos grafs, entenem per $G_1\cup G_2$ al graf que té per vèrtexs $V_1\cup V_2$ i per arestes $A_1\cup A_2$.
És a dir : $G_1\cup G_2 =(V_1\cup V_2 ,A_1\cup A_2)$.

Propietat:
La unió d'un graf amb el seu complementari és el graf complert.
Si G és un graf d'ordre n $\Rightarrow G\cup G^c = K_n$

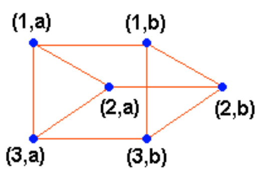
Suma de grafs

Si $G_1=(V_1,A_1)$ i $G_2=(V_2,A_2)$ són dos grafs, entenem per G_1+G_2 al graf que té per vèrtexs $V_1\cup V_2$ i per arestes $A_1\cup A_2$ juntament amb les arestes que connecten tots els vèrtexs V_1 amb tots els vèrtexs V_2.
És a dir : $G_1+G_2 =(V_1\cup V_2 ,A_1\cup A_2\cup\{uv|u\in V_1 \text{ i } v\in V_2\})$.

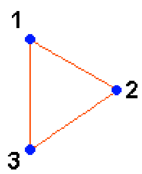
Per exemple la suma de   és 

Producte de grafs

Si $G_1=(V_1,A_1)$ i $G_2=(V_2,A_2)$ són dos grafs, definim $G_1 \times G_2$ al graf que té per vèrtexs $V_1 \times V_2$ i per arestes el conjunt
$\{(x_1, y_1) ,(x_2,y_2)|\ (x_1=x_2 \text{ i } y_1 \text{ adjacent a } y_2) \text{ o } (y_1=y_2 \text{ i } x_1 \text{ adjacent a } x_2)\}$
Per exemple



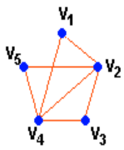
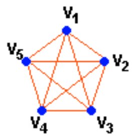
és el producte de



Subgraf

Donat un graf G=(V,A) , entendrem per sub-graf de G, a qualsevol graf H=(V',A') , que s'obté de suprimir arestes i vèrtexs de G;
És a dir:
Si G=(V,A) es un graf, H=(V',A') és un subgraf de G $\Leftrightarrow$ H és un graf i $V' \subset V$ i $A' \subset A$.

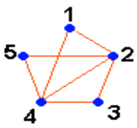
Observeu que si dos vèrtexs de V' són adjacents al garf H, també són dos vèrtexs adjacents al graf G , però nod vèrtexs adjacents de per les arestes de G, no necessàriament són adjacents del graf H.

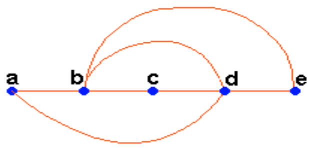
Per exemple el graf  és un subgraf de 

Isomorfia de grafs

Si $G_1=(V_1,A_1)$ i $G_2=(V_2,A_2)$ són dos grafs, direm que són isomorfs $\Leftrightarrow$ existeix una aplicació bijectiva entre V_1 i V_2 que conserva les adjacències i les no adjacències.
És a dir
Donats $G_1=(V_1,A_1)$ i $G_2=(V_2,A_2)$ grafs
$G_1 \cong G_2 \Leftrightarrow \exists\, f: V_1 \longrightarrow V_2$ f bijectiva i $uv \in A_1 \Leftrightarrow f(u)f(v) \in A_2$.

Per exemple els grafs $G_1=(V_1,A_1)$ on $V_1=\{1, 2, 3, 4,5\}$ i $A_1=\{ 12, 14, 23, 24, 25, 34, 45\}$ i i $G_2=(V_2,A_2)$ on $V_2=\{a, b, c, d, e \}$ i $A_2 =\{ ab, ad, bc, bd, be, cd, de\}$ són isomorfs.

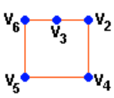


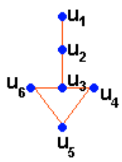


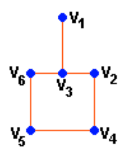
L'aplicació que ens mostra la isomorfa entre G_1 i G_2 és:
f(1)=a ,f(2)=b, f(3)=c, f(4)=d i f(5)=e. que és clarament bijectiva
Pel que fa a les adjacències i no adjacències tenim que:

$12 \in A_1 \Rightarrow f(1)f(2)=ab \in A_2$ $\quad 14 \in A_1 \Rightarrow f(1)f(4)=ad \in A_2$
$23 \in A_1 \Rightarrow f(2)f(3)=bc \in A_2$ $\quad 24 \in A_1 \Rightarrow f(2)f(4)=bd \in A_2$
$25 \in A_1 \Rightarrow f(2)f(5)=be \in A_2$ $\quad 34 \in A_1 \Rightarrow f(3)f(4)=cd \in A_2$
$45 \in A_1 \Rightarrow f(4)f(5)=de \in A_2$

per tant tota adjacència de A_1 es transforma en una adjacència de A_2. i observem que a A_2 no hi cap altra adjacència .

És evident que si dos grafs són isomorfs, tenen el mateix ordre, tenen la mateixa mida i les seqüències de graus és igual; però el fet que aquestes seqüències siguin idèntiques no comporta que els grafs siguin isomorfs, per exemple els grafs tenen les mateixes seqüències de graus i no son isomorfs, un té el cicle  l'altre no.



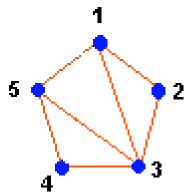


Matriu d'adjacència

Sigui G=(V,A) un graf d'ordre n , si V={ v_1, v_2, ..., v_n}anomenem matriu d'adjacència del graf a una matriu M, de manera que $m_{ij} = \begin{cases} 0 & v_i v_j \notin A \\ 1 & v_i v_j \in A \end{cases}$

Exemple:

Considerem el graf de vèrtexs V={1, 2, 3, 4, 5} i arestes A={12, 13, 15, 23, 34, 35, 45}



la seva matriu d'adjacència és:

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	0	1
2	1	0	1	0	0
3	1	1	0	1	1
4	0	0	1	0	1
5	1	0	1	1	0

Algunes observacions sobre la matriu d'adjacència:

- Amb la definició de graf que hem donat és una matriu simètrica amb 0 a la diagonal principal.
- La matriu depèn de l'ordre en que agafem els vèrtex.
- La suma de cada columna, dona el grau del vèrtex.