anàlisi de funcions

2 derivades

DERIVADA D'UNA FUNCIÓ EN UN PUNT.

Donada la funció $f:(a,b) \longrightarrow R$ i $x_0 \in (a,b)$, diem que:

$x \longrightarrow y=f(x)$

f és derivable en x_0 $\Leftrightarrow$ existeix $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

d'aquest límit, en diem la **derivada de f en x_0** i el representem per $f'(x_0)$ o $y'(x_0)$ o $(df / dx)(x_0)$.

Si anomenem **increment de x** $= \Delta x = x - x_0$ i **increment de y** $= \Delta y = f(x) - f(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Exemple:

Calculem a partir de la definició, la derivada de $y=\sqrt{x}$ en el punt d'abscissa 7.

$$y'(7) = \lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{7}}{x - 7} = \lim_{x \to 7} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{7})(\sqrt{x} + \sqrt{7})}{(x-7)(\sqrt{x} + \sqrt{7})} =$$

$$= \lim_{x \to 7} \frac{x - 7}{(x-7)(\sqrt{x} + \sqrt{7})} = \lim_{x \to 7} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{7}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} .$$

Per tal de calcular la derivada d'una funció en un punt a partir de la definició, es pot utilitzar l'anomenada **regla de les quatre passes**:

1ª Incrementar x i trobar $f(x_0)$ i $f(x_0 + \Delta x)$.

2ª Calcular $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

3ª Trobar i simplificar $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

4ª Fer el límit quan $\Delta x \longrightarrow 0$.

El resultat d'aquest límit serà el valor de la derivada.

FUNCIÓ DERIVADA - DERIVADES SUCCESSIVES.

Donada la funció $f:(a,b) \longrightarrow R$, diem que:

f és derivable a l'interval (a,b) $\Leftrightarrow$ és derivable a tots els punts de l'interval.

Si una funció és derivable a l'interval (a,b), podem considerar una altra funció que assigna a cada x_0 el valor de la derivada de f en aquest x_0

$$\begin{array}{l} (a,b) \longrightarrow R \\ x \longrightarrow \text{derivada de f en } x = f'(x) \end{array}$$

d'aquesta funció en diem **funció derivada de f** i la representem per:

$$\begin{array}{l} f':(a,b) \longrightarrow R \\ x \longrightarrow f'(x) \end{array}$$

Observeu que f ' és una funció real de variable real i, per tant, pot ser (no n'està pas obligada) que sigui derivable.

Si f ' és derivable a l'interval (a,b), podrem parlar de la derivada de f ' que en direm derivada segona o f ''.

$$\begin{array}{l} f'':(a,b) \longrightarrow R \\ x \longrightarrow \text{derivada de } f' \text{ en el punt } x \end{array}$$

f '' torna a ser una funció real de variable real i si és derivable a tot (a,b), podrem trobar la seva funció derivada, la (f '')' que anomenarem derivada tercera o f ''' .

I així, en general, es defineix la derivada n-èssima com la derivada de la (n-1)-èssima derivada:

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)} \right)'.$$

CONTINUÏTAT DE LES FUNCIONS DERIVABLES.

$f:(a,b) \longrightarrow R$ $x_0 \in (a,b)$ f derivable en x_0 $\Rightarrow$ f contínua en x_0 .

És a dir: **f derivable $\Rightarrow$ f contínua .**

Demostració:

f derivable en $x_0 \Rightarrow \exists\, f'(x_0) \in R$.

Calculem el $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) =$

per ser el límit del producte, el producte dels límits

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0 .$$

Per tant :

f derivable en $x_0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow$ f contínua en x_0.

La implicació contrària és falsa. Per veure-ho, n'hi ha prou en trobar una funció contínua en un punt i no derivable en aquest punt.
Per exemple, la funció valor absolut. és contínua en el punt 0 i no és derivable en 0.

$$|x| = \begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

$|x|$ **és contínua en 0** $\lim\limits_{x\to 0+} |x| = 0$, $\lim\limits_{x\to 0-} |x| = 0$ i $|0| = 0$.

$|x|$ **no és derivable en 0** $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x} = 1$

$$\lim\limits_{x\to 0-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-x}{x} = -1$$

Límits laterals diferents $\Rightarrow$ no existeix límit funcional $\Rightarrow |x|$ no derivable en 0.

INTERPRETACIÓ GEOMÈTRICA DE LA DERIVADA.

La derivada d'una funció en un punt és igual al pendent de la recta tangent a la funció en aquest punt.

És a dir:

$f:(a,b) \longrightarrow R \quad x_0 \in (a,b)$

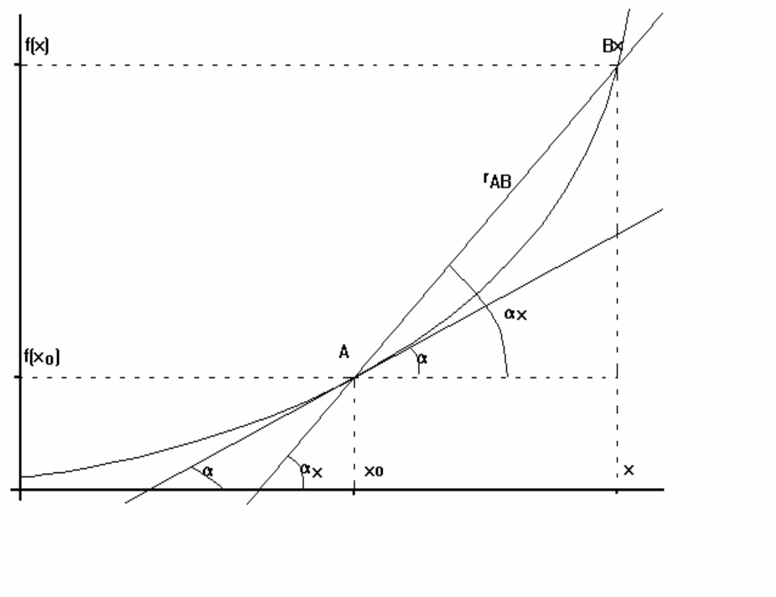
f derivable en $x_0 \Rightarrow f'(x_0)$ = pendent de la recta tangent en $(x_0, f(x_0))$.

Demostració:

Considerem el punt $A=(x_0,f(x_0))$.

Per a cada x d'un entorn de x_0 podem considerar el punt $B_x=(x,f(x))$.

Tracem la recta $\mathbf{r}_{AB}$ secant a la corba pels punts A i B_x .



Per definició de pendent, tenim que:

$$\text{pendent } \mathbf{r}_{AB} = \operatorname{tg} \alpha_x = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

Si fem $x \longrightarrow x_0 \Rightarrow \mathbf{r}_{AB} \longrightarrow$ tangent en A

doncs: f derivable en $x_0 \Rightarrow$ f contínua en x_0

$\Rightarrow f(x) \longrightarrow f(x_0) \Rightarrow B_x \longrightarrow A$

$\Rightarrow \mathbf{r}_{AB} \longrightarrow$ tangent en A .

Per tant, quan $x \longrightarrow x_0$ el pendent de la secant per A i B_x passa a ser el pendent de la tangent en A.

Amb el que:

$$\text{pendent tangent} = \lim_{x \to x_0} \text{pendents secants per A i B} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

TANGENTS I NORMALS A UNA CORBA.

Si $y=f(x)$ és una funció derivable en un punt x_0, la interpretació geomètrica anterior, ens permet afirmar que l'equació de la recta **tangent** en el punt d'abscissa x_0 és:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)\,.$$

I que l'equació de la **normal** en x_0 és:

$$y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}\,(x - x_0)$$

Exemple:

Calculem l'equació de la tangent a $y = x^3 + x$ en el punt d'abscissa -1.

Trobem en primer lloc les coordenades del punt de tangència:

$f(-1) = (-1)^3 + (-1) = -2 \Rightarrow$ punt tangència = (-1,-2).

Calculem $y'(-1)$: $y' = 3x^2 + 1 \Rightarrow y'(-1) = 3(-1)^2 + 1 = 4$.

La recta buscada és $y + 2 = 4(x + 1)$; i expressada en forma explícita és: $y = 4x + 2$.

CÀLCUL DE DERIVADES.

REGLES DE DERIVACIÓ.

La derivada d'una constant és 0.

f(x)=k =constant $\Rightarrow$ f és derivable i f '(x)=0.

Ja que:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{k - k}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} 0 = 0 .$$

La derivada de y=x és 1.

f(x)=x $\Rightarrow$ f és derivable en qualsevo x_0 i f '(x)=1.

Ja que:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} 1 = 1 .$$

La derivada d'una suma és la suma de derivades.

y=f(x) i y=g(x) derivables en x_0 g $\Rightarrow$
y = f(x) + g(x) derivable en x_0 i (f+g)'(x_0)=f '(x_0) + g'(x_0)

Ja que:

$$(f+g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

La derivada d'una constant per una funció és la constant per la derivada de la funció.

y=f(x) derivable en x_0 i k constant $\Rightarrow$ y = k·f(x) derivable en x_0 i
(k·f)'(x_0)=k·f '(x_0)

Ja que:

$$\left(k\cdot f\right)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{k\cdot f(x) - k\cdot f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{k\cdot\left(f(x) - f(x_0)\right)}{x - x_0} = k\cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k\cdot f'(x_0)$$

La derivada d'un producte és la derivada del primer factor per el segon més la derivada del segon per el primer.

y=f(x) i y=g(x) derivables en x_0 $\Rightarrow$
y = f(x)·g(x) derivable en x_0 i (f·g)'(x_0)=f '(x_0)·g(x_0) +f(x_0)· g'(x_0)

Ja que:

$$(f\cdot g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{x - x_0} =$$

sumant i retant $f(x)\cdot g(x_0)$

$$(f\cdot g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x_0) + f(x)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{x - x_0}$$

i treient fector comú

$$(f\cdot g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\cdot\left(g(x) - g(x_0)\right) + \left(f(x) - f(x_0)\right)\cdot g(x_0)}{x - x_0}$$

com el límit d'una suma és la suma dels límits:

$$(f\cdot g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\cdot\left(g(x) - g(x_0)\right)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{\left(f(x) - f(x_0)\right)\cdot g(x_0)}{x - x_0}$$

com el límit d'un producte és el producte dels límits:

$$(f\cdot g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\cdot \lim_{x\to x_0} g(x_0)$$

com f és contínua al ser derivable

$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0) +f(x_0)\cdot g'(x_0)$.

Propietat

$y=g(x)$ derivable en x_0 i $g(x_0)\neq 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{g} \text{ derivable en } x_0 \text{ i } \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Ja que:

Com $g\cdot\frac{1}{g} = 1$

derivant els dos membres tenim que:

$$\left(g\cdot\frac{1}{g}\right)' = 0 \Rightarrow g'\cdot\frac{1}{g} + g\cdot\left(\frac{1}{g}\right)' = 0$$

i isolant

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'\cdot\frac{1}{g}}{g} = \frac{-g'}{g^2}$$

és a dir:

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$$

La derivada d'un quocient és la derivada del numerador pel denominador menys la derivada del denominador pel numerador partit tot pel denominador al quadrat.

$y=f(x)$ i $y=g(x)$ derivables en x_0 i $g'(x_0)\neq 0 \Rightarrow$

$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ derivable en x_0 i $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0)=\dfrac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-g'(x_0)\cdot f(x_0)}{g^2(x_0)}$

Ja que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x_0)=f'(x_0)\cdot\frac{1}{g}(x_0)+f(x_0)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=f'(x_0)\cdot\frac{1}{g}(x_0)+f(x_0)\cdot\frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-g'(x_0)\cdot f(x_0)}{g^2(x_0)}\ .$$

Derivada l'un logaritme

La funció $y=\log_a x$ és derivable i $y'=[\log_a]'(x_0)=\dfrac{1}{x_0\cdot \ln a}$

Ja que:

$$y'=[\log_a]'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x_0+\Delta x)-\log_a x_0}{\Delta x}$$

Com el logaritme d'un quocient és la diferència de logaritmes

$$y'=[\log_a]'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\dfrac{\Delta x+x_0}{x_0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\log_a\frac{\Delta x+x_0}{x_0}$$

Multiplicant i dividint per x_0

$$y'=[\log_a]'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0}{\Delta x}\cdot\frac{1}{x_0}\log_a\frac{\Delta x+x_0}{x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\cdot\frac{1}{x_0}\cdot\frac{x_0}{\Delta x}\cdot\log_a\frac{\Delta x+x_0}{x_0}$$

$$y'=[\log_a]'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x_0}\cdot\log_a\left(\frac{\Delta x+x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{\Delta x}}=\frac{1}{x_0}\cdot\log_a\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta x+x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{\Delta x}}$$

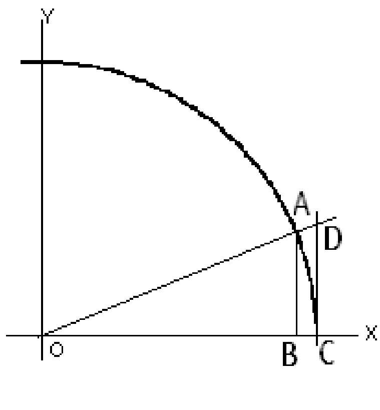
$$[\log_a]'(x_0)=\frac{1}{x_0}\cdot\log_a\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{\Delta x}}=\frac{1}{x_0}\cdot\log_a\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{1}{\dfrac{x_0}{\Delta x}}\right)^{\frac{x_0}{\Delta x}}=\frac{1}{x_0}\cdot\log_a e$$

$$[\log_a]'(x_0)=\frac{1}{x_0}\cdot\log_a e=\frac{1}{x_0\cdot\ln e}\ .$$

Derivada de les funcions circulars.

Propietat

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



Considerem la circumferència prigonomètrica de radi 1 és clar que

$$1 \le \sin x = \overline{AB} \le \text{arc}\,(AC) = x \le \overline{CD} = \text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

és a dir $\sin x \le x \le \dfrac{\sin x}{\cos x}$

dividint tots els termes per sin x, obtenim

$$1 \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x}$$

i fent el límit quan x tendeix a 0

$$\lim_{\Delta x\to 0} 1 \le \lim_{\Delta x\to 0} \frac{x}{\sin x} \le \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\cos x}$$

i per tant

$$1 \le \lim_{\Delta x\to 0} \frac{x}{\sin x} \le \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

$$1 \le \lim_{\Delta x\to 0} \frac{x}{\sin x} \le 1 \;\Rightarrow\; \lim_{\Delta x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

Derivada del sinus

La funció y = sin x és derivable i y'=cos x.

Ja que:

$$\sin' x_0 = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin\,(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} \;\Rightarrow$$

Com $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$$\sin' x_0 = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\cdot\cos\dfrac{x_0 + \Delta x + x_0}{2}\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$\sin' x_0 = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos\dfrac{2\cdot x_0 + \Delta x}{2}\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}$$

$$\sin' x_0 = \lim_{\Delta x\to 0} \cos\frac{2\cdot x_0 + \Delta x}{2}\cdot\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}$$

$$\sin' x_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\frac{2\cdot x_0 + \Delta x}{2} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\sin' x_0 = \cos\frac{2\cdot x_0 + 0}{2} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Com per la propietat anterior $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$

$\sin' x_0 = \cos x_0 \cdot 1 = \cos x_0$.

Derivada del cosinus

La funció $y = \cos x$ és derivable i $y' = -\sin x$.

Ja que:

DERIVACIÓ DE FUNCIONS COMPOSTES. REGLA DE LA CADENA.

Donades $f:(a,b) \longrightarrow R$ i $g:(c,d) \longrightarrow R$ que es puguin composar $f(a,b) \subset (c,d)$.

$x \longrightarrow u=f(x) \qquad u \longrightarrow z=g(u)$

$x_0 \in (a,b)$ f derivable en x_0 i g derivable en $f(x_0) = u_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow g \circ f$ és derivable en x_0 i $(g \circ f)' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = g'(y_y) \cdot f'(x_0)$.

És a dir:

La composició de derivables és derivable i $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$.

Demostració:

Considerem la funció Γ definida en la forma:

$$\Gamma:(c,d) \longrightarrow R$$

$$y \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} & \text{quan } y \neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)) & \text{quan } y = f(x_0) \end{cases}$$

Γ és contínua en $f(x_0)$

ja que:

$$\lim_{y \to f(x_0)} \Gamma(y) = \lim_{y \to f(x_0)} \frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} = g'(f(x_0)) = \Gamma(f(x_0))$$

com f contínua en $x_0 \Rightarrow \Gamma \circ f$ és contínua en x_0.

Fixat $x \in (a,b) \Rightarrow \Gamma(f(x))\big(f(x) - f(x_0)\big) = g(f(x)) - g(f(x_0))$. (1)

Ja que es poden produir dues situacions:

$$f(x) \neq f(x_0) \Rightarrow \Gamma(f(x)) = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \Rightarrow$$

$$\Gamma(f(x))\big(f(x) - f(x_0)\big) = g(f(x)) - g(f(x_0))$$

$$f(x) = f(x_0) \Rightarrow \Gamma(f(x))\big(f(x) - f(x_0)\big) = \Gamma(f(x)) \cdot 0 = 0 = g(f(x)) - g(f(x_0))$$

Dividint (1) per $x - x_0$, obtenim: $\Gamma(f(x)) \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0}$.

Si ara prenem límit quan $x \longrightarrow x_0$

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \Gamma(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \Gamma(f(x_0))\, f'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0) .$$

Exemple:

Derivada del cosinus

La funció y = cos x és derivable i y'=-sin x.

Ja que:

$$\text{Com } \cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \text{ i } \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\cos' x = \sin'\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)' = -1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\sin x \ .$$

DERIVADA DE FUNCIONS RECÍPROQUES.

Si $f:(a,b) \longrightarrow (c,d)$ té recíproca $f^{-1}:(c,d) \longrightarrow (a,b)$

$x \longrightarrow y \qquad\qquad y \longrightarrow x$

$\mathbf{x_0 \in (a,b)}$ **i** $\mathbf{y_0 = f(x_0)}$

f derivable en $\mathbf{x_0}$ i $\mathbf{f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow f^{-1}}$ és derivable en $\mathbf{y_0}$ i $\mathbf{(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}}$**.**

Demostració:

f i f^{-1} recíproques $\Rightarrow (f^{-1} \circ f)(x) = x = I(x)$.

Derivant aquesta expressió en el punt x_0, obtenim:

$$(f^{-1})'(f(x_0))\cdot f'(x_0) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Exemple1:

La funció $y = e^x$ és derivable i $y'=e^x$.

Càlcul de la derivada de $y = e^x$.

Prenem $x = \ln y$ i $y = e^x$, que són recíproques

Llavors $y' = \dfrac{1}{\ln' y} = \dfrac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x$.

Exemple2:

Càlcul de la derivada de y = arc sin x.

Prenem x = sin y i y = arc sin x , que són recíproques entre $(-\pi/2,\pi/2)$ i $(-1,1)$.

Llavors $y' = \dfrac{1}{\sin' y} = \dfrac{1}{\cos y}$

Com $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$

substituint: $(\text{arc}\sin)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

MÈTODE DE DERIVACIÓ LOGARÍTMICA.

Donada y=f(x), anomenem **derivada logarítmica** de y, a la derivada del seu logaritme neperià.

Com $h(x) = \ln y = \ln f(x) \Rightarrow h'(x) = \dfrac{y'}{y}$ = derivada logarítmica de y

La derivada logarítmica es pot utilitzar per simplificar el procés de càlcul de la derivada d'algunes funcions, seguint el mètode il.lustrat en el següent:

Exemple1:

La funció $y=x^{\alpha}$ és derivable i $y'= \alpha\cdot x^{\alpha-1}$.

Ja que:

Si $y=x^{\alpha}$ prenent logaritmes neperians als dos membres de la igualtat obtenim

$\ln y = \ln x^{\alpha} = \alpha\cdot \ln x$.

derivant membres a membre

$$\frac{y'}{y} = \alpha\cdot\ln' x = \alpha\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{y'}{x^{\alpha}} = \alpha\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow y' = \alpha\cdot\frac{1}{x}\cdot x^{\alpha} = \alpha\cdot x^{\alpha-1} \ .$$

Exemple 2:

Calcularem la derivada de $y = x^{x}$.

Prenem logaritmes neperians als dos membres de la igualtat: $\ln y = \ln x^{x} = x \ln x$.

Derivant membre a membre:

Derivant membre a membre $\dfrac{y'}{y} = 1\cdot\ln x + x\cdot\dfrac{1}{x} = \ln x + 1 = 1 + \ln x$

I finalment isolant y ' , obtenim: $y' = y\,(1+\ln x) = x^{x}\,(1 + \ln x)$.

Com a reultat de les propietats anteriors, tenim la següent

TAULA DE DERIVADES.

$y = k = ctt \Rightarrow y' = 0$ $\qquad$ $y = f+g \Rightarrow y' = f'+g'$

$y = k\,f \Rightarrow y' = k\,f'$ $\qquad$ $y = f\,g \Rightarrow y' = f'g + f\,g'$

$$y = \frac{f}{g} \Rightarrow y' = \frac{f'g - f\,g'}{g^2}$$

$y = x^{\alpha} \Rightarrow y' = \alpha\, x^{\alpha-1}$ $\qquad$ $y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$y = a^x \Rightarrow y' = a^x \ln a$ $\qquad$ $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$

$y = \log_a x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $\qquad$ $y = \ln x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x}$

$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$ $\qquad$ $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$

$$y = tg\, x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + tg^2 x$$

$$y = ctg\, x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x = -(1 + ctg^2 x)$$

$y = \sec x \Rightarrow y' = \sec x\ tg\, x$ $\qquad$ $y = \operatorname{cosec} x \Rightarrow y' = -\operatorname{cosec} x\ ctg\, x$

$y = arc \sin x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $\qquad$ $y = arc \cos x \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$y = arc\ tg\, x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$ $\qquad$ $y = arc\ cotg\, x \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{1 + x^2}$

$y = arc \sec x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ $\qquad$ $y = arc\ cosc\, x \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

DIFERENCIAL.

CONCEPTE DE DIFERENCIAL.

Donada y=f(x) una funció real de variable real derivable a l'interval (a,b) i $x \in (a,b)$.
Per definició de derivada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Per tant a un entorn de x podem expressar:

$$(1) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + O(\Delta x) \Rightarrow O(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)$$

on aquesta O(x) és una funció definida en un entorn de x.

Es clar que $\lim_{\Delta x \to 0} O(\Delta x) = 0$.

De l'expressió (1) en podem deduir:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + O(\Delta x) \cdot \Delta x$$

que expressa Δy com una suma de dos termes .

El primer terme $f'(x) \cdot \Delta x$ rep el nom de **diferencial de y** = dy, i el segon tendeix a zero molt ràpidament.

Observem que quan f = identitat $\Rightarrow$ y = f(x) = x $\Rightarrow$ y ' = 1 $\Rightarrow$ dy = dx = $1 \cdot \Delta x = \Delta x$
i per tant $\Rightarrow$ Δx = dx = diferencial de x.

Amb el que, per una funció f derivable, la seva diferencial és : $dy = f'(x) \cdot dx$.

Aquesta expressió justifica la notació de la derivada com $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

IDEA D'APROXIMACIÓ LINEAL.

L'experiència ens diu, que si dibuixem la recta tangent a una funció en un punt, prop del punt de tangència és difícil de distingir entre la gràfica de la funció i la recta tangent. Aquest fet el podem aprofitar i aproximar la corba per la recta tangent.

Considerem la funció $y=f(x_0)$, derivable en x_0, pel que hem vist a l'apartat anterior, podem expressar el Δy com:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + O(\Delta x) \cdot \Delta x \ ,$$

substituint $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ i $\Delta x = x - x_0$

tenim que $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + O(x-x_0)(x-x_0)$

és a dir: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + O(x-x_0)(x-x_0)$.

Ara bé, si $x \longrightarrow x_0 \Rightarrow O(x-x_0) \longrightarrow 0$ i $(x-x_0) \longrightarrow 0 \Rightarrow$ el producte també tendirà a zero i de forma molt més ràpida $\Rightarrow$

$O(x-x_0)(x-x_0) \longrightarrow 0$ és un infinitèssim d'ordre superior a 1.

Per tant, a un entorn suficientment petit de x_0, podem aproximar la funció per la seva recta tangent en la forma:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

i l'error d'aproximació és $O(x-x_0)(x-x_0)$, que tendeix a zero molt ràpidament, quan x tendeix a x_0.

REGLES DE DIFERENCIACIÓ.

Com la diferencial d'una funció y és $dy = y'\cdot dx$, les regles de diferenciació són bàsicament les mateixes que les de derivació, en remarcarem algunes:

La diferencial d'una constant és 0.

Ja que: $y = k \Rightarrow dy = k'\, dx = 0\, dx = 0$.

La diferencial d'una constant per una funció és la constant per la diferencial de la funció.

Ja que: $y = k\, u \Rightarrow dy = (k\, u)'\, dx = k \cdot u'\, dx = k\, du$.

La diferencial d'una suma és la suma de les diferencials.

Ja que si $y = u + v \Rightarrow dy = (u + v)'\, dx = u'\, dx + v'\, dx = du + dv$.

Diferencial d'un producte és la diferencial del primer factor pel segon mes la diferencial del segon factor pel primer . $y = u\, v \Rightarrow dy = v\, du + u\, dv$.

Ja que si $y = u\, v \Rightarrow dy = (u\, v)'\, dx = (u'\, dx)\, v + u\, v'\, dx = v\, du + u\, dv$.

Exemple:

Calcularem la diferencial de $f(x) = x\, e^x$.

$d\, f = d(x\, e^x) = f'\, dx$

Derivant f, obtenim $f'(x) = 1\cdot e^x + x\, e^x = e^x\,(1 + x)$.

Per tant $d\, f = e^x\,(1+x)\, dx$.

CREIXEMENT I DECREIXEMENT.

Donada $f:(a,b) \longrightarrow R \quad x_0 \in (a,b)$, diem que:

$$f \text{ és } \textbf{creixent} \text{ en } x_0 \Leftrightarrow \exists\, U \text{ entorn de } x_0 \text{ i } \forall\, x \in U \Rightarrow \begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \\ x_0 < x \Rightarrow f(x_0) < f(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, \delta > 0 \text{ i } \forall\, x \quad |x - x_0| \langle\, \delta \Rightarrow \begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \\ x_0 < x \Rightarrow f(x_0) < f(x) \end{cases}$$

És a dir:

f és creixent en el punt x_0 $\Leftrightarrow$ per valors de x propers a x_0, els punts anteriors a x_0 tenen imatges anteriors a la imatge de x_0, i els punts posteriors a x_0 tenen imatges posteriors a la imatge de x_0 .

$$f \text{ és } \textbf{decreixent} \text{ en } x_0 \Leftrightarrow \exists\, U \text{ entorn de } x_0 \text{ i } \forall\, x \in U \Rightarrow \begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \\ x_0 < x \Rightarrow f(x_0) > f(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, \delta > 0 \text{ i } \forall\, x \quad |x - x_0| \langle\, \delta \Rightarrow \begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \\ x_0 < x \Rightarrow f(x_0) > f(x) \end{cases}$$

És a dir:

f és decreixent en el punt x_0 $\Leftrightarrow$ per valors de x propers a x_0, els punts anteriors a x_0 tenen imatges posteriors a la imatge de x_0 , i els punts posteriors a x_0 tenen imatges anteriors a la imatge de x_0

PROPIETAT I .

$f:(a,b) \longrightarrow R \quad x_0 \in (a,b)$ i f derivable en x_0

f creixent en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$.

f decreixent en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$.

Demostració:

$$f \text{ creixent en } x_0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0 \text{ i } \forall\, x \quad |x - x_0| \langle\, \delta \Rightarrow \begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \\ x_0 < x \Rightarrow f(x_0) < f(x) \end{cases}$$

I per tant, quan $|x - x_0| \langle\, \delta$, es compleix que:

$x - x_0 < 0 \Rightarrow x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) < 0$

$x - x_0 > 0 \Rightarrow x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0$

O dit d'una altra manera, per $|x - x_0| \langle\, \delta$ $\quad x - x_0$ i $f(x) - f(x_0)$ tenen el mateix signe

és a dir : si $|x - x_0| \langle\, \delta \qquad \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.

Per definició de derivada , f derivable en $x_0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

Quan fem l límit $x \to x_0$, arriba un moment en que $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow$ és el límit d' una expressió que sempre és >0 $\Rightarrow$ el límit és ≥ 0 .

Amb el que:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{+}{+} \geq 0 \,.$$

Anàlogament es demostra que: $\quad$ f decreixent en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$.

PROPIETAT I I

$f:(a,b) \longrightarrow R \quad x_0 \in (a,b)$ i f derivable en x_0

$f'(x_0) > 0 \Rightarrow$ f creixent en x_0 .

$f'(x_0) < 0 \Rightarrow$ f decreixent en x_0 .

Demostració:

Demostrarem que $f'(x_0) > 0 \Rightarrow$ f creixent en x_0.

Suposem f derivable en x_0 i $f'(x_0) > 0 \;\Rightarrow\; \exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) > 0 \;\Rightarrow$

Sabem que valors negatius o nuls, sols poden donar límits negatius o nuls. I per tant si aquest límit és positiu , cal que pels valors de x suficientment propers a x_0 , el quocient

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ sigui estrictament positiu.}$$

És a dir $\quad \exists\, \delta > 0$ i $\forall x \;\; |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \;\Rightarrow$

$$\exists\, \delta > 0 \text{ i } \forall x \;\; |x - x_0| < \delta \begin{cases} \text{si } \; x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \\ \text{si } \; x - x_0 > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\exists\, \delta > 0 \text{ i } \forall x \;\; |x - x_0| \Rightarrow \begin{cases} x < x_0 \;\Rightarrow\; f(x) < f(x_0) \\ x > x_0 \;\Rightarrow\; f(x) > f(x_0) \end{cases} \Rightarrow$$

Per tant: f és creixent en x_0 .

Observació: Combinant les dues propietats anteriors, tenim que:

Per estudiar el creixement d'una funció, sols ens cal estudiar el signe que té la seva derivada.

EXTREMS D'UNA FUNCIÓ.

Donada $f:[a,b] \longrightarrow R$ diem que:

$x_0 \in [a,b]$ és **màxim absolut** de f a $[a,b] \Leftrightarrow \forall x \in [a,b] \quad f(x) \leq f(x_0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $f(x_0)$ és el valor mes gran de totes les imatges.

$x_0 \in [a,b]$ és **mínim absolut** de f a $[a,b] \Leftrightarrow \forall x \in [a,b] \quad f(x) \geq f(x_0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $f(x_0)$ és el valor mes petit de totes les imatges.

$x_0 \in [a,b]$ és extrem absolut de f a [a,b] $\Leftrightarrow$ x_0 és un màxim o un mínim absolut.

$x_0 \in (a,b)$ és màxim relatiu de f a (a,b) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists \delta > 0$ i $\forall x \in (a,b) \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ per les x properes a x_0, $f(x_0)$ és el valor mes gran de les imatges .

$x_0 \in (a,b)$ és mínim relatiu de f a (a,b) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists \delta > 0$ i $\forall x \in (a,b) \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ per les x properes a x_0, $f(x_0)$ és el valor mes petit de les imatges .

$x_0 \in (a,b)$ és extrem relatiu de f a (a,b) $\Leftrightarrow$ x_0 és un màxim o un mínim relatiu .

PROPIETAT.

$f:(a,b) \longrightarrow R \quad x_0 \in (a,b)$ i f derivable en x_0.

x_0 extrem relatiu de f $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Demostració:

Suposem x_0 màxim de f , (si és mínim es raona de forma semblant)

$x_0 \in (a,b)$ màxim $\Rightarrow \exists \delta > 0$ i $\forall x \in (a,b) \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) \leq 0$
.

Per ser f derivable en x_0 $\Rightarrow \exists \ f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$\Rightarrow$ existeixen els límits laterals i coincideixen amb $f'(x_0)$.

Degut a que fem el límit quan $x \to x_0$, arriba un moment en que $|x - x_0| < \delta$.
I per tant

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0+ \\ |x-x_0|<\delta}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ |x-x_0|<\delta \\ x>x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim \frac{-}{+} \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0 .$$

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0^-\\ |x-x_0|<\delta}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ |x-x_0|<\delta \\ x<x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim \frac{-}{-} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0 .$$

És a dir , per un costat $f'(x_0) \leq 0$ i per l'altra $f'(x_0) \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$.

TEOREMA DE ROLLE.

$f:[a,b] \longrightarrow R$ f contínua a [a,b] i derivable a (a,b)

$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ de manera que $f'(c) = 0$.

Demostració:
Es poden donar dues possibilitats:

- f constant $\Rightarrow f'=0 \Rightarrow$ qualsevol punt de (a,b) té derivada 0 $\Rightarrow$ es compleix el teorema.
- f no constant:

Tenim que f és contínua a [a,b], pel teorema de Weierstraß,
$\exists\, x_M, x_m \in [a,b]$ màxim i mínim absoluts de f $\Rightarrow \forall\, x \in [a,b]$ $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$.

Per ser f no constant $\Rightarrow f(x_m) \neq f(x_M)$, i per la hipòtesi $f(a) = f(b) \Rightarrow$
x_m i x_M no poden ser tots dos els extrems de l'interval.
Suposem x_M diferent de a i de b $\Rightarrow x_M \in (a,b)$.

Prenent $\delta = \text{mín}\,\{|a - x_M| , |b - x_M|\}/2 > 0$
tindrem que:
$\exists\, \delta > 0$ i $\forall\, x$ $|x - x_M| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(x_M)$.
És a dir aquest x_M és màxim relatiu de f a (a,b) .

Si fos x_m diferent de a i de b , tindríem que x_m és un mínim relatiu de f a l'interval (a,b).

Per tant, si f no és constant, existeix c extrem relatiu de f a l'interval (a,b).
I per la propietat anterior $f'(c) = 0$.

TEOREMA DELS INCREMENTS FINITS.

$f:[a,b] \longrightarrow R$

f contínua a [a,b] i derivable a (a,b) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ existeix $c \in (a,b)$ de manera que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Demostració:

Considerem g(x) l'aplicació $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x-a)$

g és contínua en [a,b] per ser suma i producte de contínues , g és derivable en (a,b) per ser suma i producte de derivables i

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ara bé

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b-a) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a)$$

$$\text{i } g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a-a) = f(a) \Rightarrow g(a) = g(b)$$

tenim que g compleix les hipòtesis del teorema de Rolle, per tant $\exists\, c\in(a,b)$ / $g'(c)= 0$;

és a dir: $\exists\, c\in(a,b)\quad g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$.

Amb el que: $\exists\, c\in(a,b)\quad f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Observi's que geomètricament, aquest teorema, ens diu que:
si tenim una funció i li considerem una corda, sempre podem trobar una tangent a la funció, que sigui paral·lela a aquesta corda.

TEOREMA DE CAUCHY.

$f:[a,b] \longrightarrow R$ i $g:[a,b] \longrightarrow R$

f i g contínues a [a,b] i derivables a (a,b)
$\Rightarrow \exists\, c\in(a,b)$ de manera que $\big(f(b) - f(a)\big)\, g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)\, f'(c)$

Si $g(a) \neq g(b)$, aquest resultat s'acostuma a expressar en la forma:

$$\Rightarrow \exists\, c\in(a,b) \text{ de manera que } \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Demostració:

Considerem $F(x) = \big(f(b)-f(a)\big)\, g(x) - \big(g(b)-g(a)\big)\, f(x)$.
F és contínua a [a,b] per ser suma i producte de contínues
F és derivable a (a,b) per ser suma i producte de derivables.

$$F'(x) = \big(f(b)-f(a)\big)\, g'(x) - \big(g(b)-g(a)\big) f'(x)$$

$$F(a) = \big(f(b)-f(a)\big)\, g(a) - \big(g(b)-g(a)\big)\, f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) .$$

$$F(b) = \big(f(b)-f(a)\big)\, g(b) - \big(g(b)-g(a)\big)\, f(b) = f(b)g(a) - g(b)f(a) .$$

Som doncs a les hipòtesis del teorema de Rolle $\Rightarrow \exists\, c\in (a,b)$ tal que $F'(c) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists\, c\in(a,b) \text{ de manera que } \big(f(b) - f(a)\big)\cdot g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)\cdot f'(c) .$$

REGLA DE L'HÔPITAL.

f i g contínues i derivables en un entorn de x_0

$f(x_0) = 0$ i $g(x_0) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Demostració:

Sigui U l'entorn de x_0 on f i g són contínues i derivables

$\Rightarrow$ existeix r>0 i a l'interval (x_0-r,x_0+r) f i g són contínues i derivables.

Per tota $x\in(x_0-r,x_0+r)$ f i g són contínues a l'interval $[x_0,x]$ i derivables en (x_0,x), amb el que podem aplicar el teorema de Cauchy $\Rightarrow$

$$\exists\, c\in(x_0,x) \qquad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Prenent límits quan $x \longrightarrow x_0$, per ser $c\in(x_0,x) \Rightarrow c \longrightarrow x_0$
amb el que:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

però, el nom de la variable, no modifica pas el límit,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

OBSERVACIONS:

- Per aplicar la regla de l'Hôpital és necessari que el límit inicial sigui una indeterminada en la forma 0/0, tot i que també pot aplicar-se directament a indeterminades del tipus ∞/∞.
- La regla de l'Hôpital també pot aplicar-se quan fem límits a l'infinit, $x \longrightarrow \infty$.
- Fent alguns canvis, també facilita el càlcul d'indeterminades del tipus $0\cdot\infty$, 0^0 i 1^∞

Exemples:

- $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2x}{1} = 2 .$$

- $$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1^\infty .$$

No podem pas aplicar la regla de l'Hôpital; però si fem:

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \text{, el límit buscat és } \lim_{x\to\infty} y \ .$$

Prenent logaritmes $\Rightarrow \ln y = x \ln(1+1/x) = \dfrac{\ln(1+1/x)}{1/x}$

llavors $$\lim_{x\to\infty} \ln y = \frac{\ln(1+1/x)}{1/x} = \frac{0}{0} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{1+1/x}\,\dfrac{-1}{x^2}}{\dfrac{-1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+1/x} = \frac{1}{1+1/\infty} = \frac{1}{1+0} = 1 \ .$$

Per tant

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim y = \lim e^{\ln y} = e^{\lim \ln y} = e.$$

FORMULA DE TAYLOR PER POLINOMIS.

Quan es considera P(x) un polinomi de grau n, sempre s'acostuma a escriure una expressió en la forma:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n ,$$

que ens dona el polinomi com a suma de potències de x, o si es prefereix, de (x-0).

Ens podem qüestionar si això ho podem fer per a qualsevol nombre real a, és a dir: si per a tot a, podem trobar uns coeficients b_i , de manera que el polinomi sigui una suma de potències de (x-a) :

$$P(x) = b_0 + b_1 (x-a) + b_2 (x-a)^2 + ... + b_n (x-a)^n.$$

Si això és possible, tindrem que, derivant,

$$\begin{aligned} P'(x) &= b_1 + 2\cdot b_2 (x-a) + 3\cdot b_3 (x-a)^2 + ... + n\cdot b_n (x-a)^{n-1} \\ P''(x) &= 2\cdot b_2 + 3\cdot 2\cdot b_3 (x-a) + ... + n\cdot(n-1)\cdot b_n (x-a)^{n-2} \\ &\vdots \\ P^{n)}(x) &= n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot 1\cdot b_n = n!\cdot b_n \end{aligned}$$

i substituint en el punt a i isolant

$$\left.\begin{aligned} P(a) &= b_0 \\ P'(a) &= b_1 \\ P''(a) &= 2!\cdot b_2 \\ &\vdots \\ P^{n)}(a) &= n!\cdot b_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad b_i = \frac{P^{i)}(a)}{i!}.$$

Per tant sempre podem trobar els coeficients que expressen P(x) com a suma de potències de (x-a) en la forma:

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{P^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

que en diem **fórmula de Taylor** de P(x) en el punt a.

FORMULA DE TAYLOR.

Donada $f:(a-r,a+r) \longrightarrow R$ una funció n cops derivable,
considerem el polinomi

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

És clar que f i P_n coincideixen en les seves n primeres derivades en el punt a, amb el que podrem aproximar la funció f pel polinomi P_n.

Si $R_n(x)$ és l'error d'aproximació tindrem que

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) .$$

I, per tant, podrem expressar f en la forma:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 +..+ \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

que anomenarem **fórmula de Taylor de la funció f** a un entorn del punt **a** fins a la derivada n.

RESTE DE LAGRANGE.

Si f és n+1 cops derivable, el terme R_n el podem expressar :

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{on } c \in (a,x) .$$

Demostració:

Per a cada $x \in (a-r,a+r)$, considerem la funció:

$$F(t) = f(t) + \frac{x-t}{1!} f'(t) + \frac{(x-t)^2}{2!} f''(t) + ... + \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n)}(t) + \frac{(x-t)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}} R_n(x)$$

F és contínua i derivable a l'interval [a,x] per ser suma de constants per contínues.

Observem que F(a) = F(x) :

$$F(a)= f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + .. + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}} Rn(x) = f(x).$$

i F(x)=f(x)

Amb el que F(a)=F(x) i per tant : som a les hipòtesis del teorema de Rolle $\Rightarrow$
$\exists c \in (a,x)$ de manera que $F'(c)=0$.

Ara bé, derivant F, obtenim:

$$F'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1)}(t) - \frac{(n+1)(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}} R_n(x)$$

Amb el que:

$$\exists c \in (a,x) \qquad F'(c) = \frac{(x-c)^n}{n!} f^{n+1)}(c) - \frac{(n+1)(x-c)^n}{(x-a)^{n+1}} R_n(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\exists c \in (a,x) \qquad \frac{(x-c)^n}{n!} f^{n+1)}(c) = \frac{(n+1)(x-c)^n}{(x-a)^{n+1}} R_n(x)$$

Per tant

$$\exists\, c \in (a,x) \qquad R_n(x) = \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} .$$

FORMULA DE MC-LAURIN.

Si f és una funció n+1 cops derivable a un entorn del 0, anomenem fórmula de Mc-Laurin de f fins a la n-èssima derivada, a la fórmula de Taylor en el punt 0, amb el reste de Lagrange.

És a dir:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad \text{on} \quad 0<\theta<1 .$$

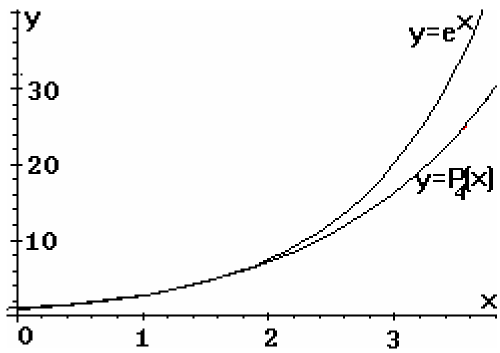
Justificació:

El reste de Lagrange serà: $R_n(x) = \dfrac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$ on $c \in (0,x)$

Per ser $0<c<x \Rightarrow$ dividint per x i anomenant θ a $\dfrac{c}{x} \Rightarrow \quad c = \theta x$.

Exemple:

$y = e^x$ a un entorn del punt 0 és:



$$P_4(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \qquad 0<\theta<1$$

Ja que:

$y' = e^x \Rightarrow y'(0) = 1$

$y'' = e^x \Rightarrow y''(0) = 1$

$\vdots$

$y^{n)} = e^x \Rightarrow y^{n)}(0) = 1$

$y^{n+1)} = e^x \Rightarrow y^{n+1)}(0) = 1$.

Per n=4, tenim que:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} e^{\theta x} \quad \text{per} \quad 0<\theta<1$$

on l'error d'aproximació és $\frac{x^5}{120} e^{\theta x}$.

Quan prenem $|x|<1$, l'error és menor que:

$$\text{error} = \left| \frac{x^5}{120} e^{\theta x} \right| = \frac{|x^5|}{120} |e^{\theta x}| < \frac{1}{120} e < \frac{1}{120} 3 = 0.025 .$$

i així, per exemple

$\sqrt{e} = e^{0.5} \cong 1 + 0.5 + 0.125 + 0.2083 + 0.0026 = 1.648$

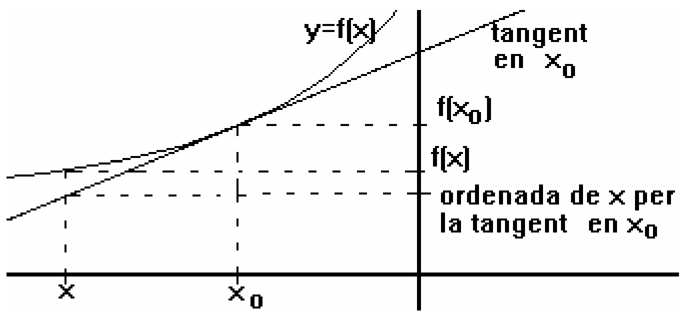
i l'error màxim que hem comes és de 0.025 .

CONCAVITAT, CONVEXITAT I INFLEXIONS.

Donada la funció y=f(x) derivable en el punt x_0, considerem la recta tangent a aquesta funció en aquest punt.
Diem que:

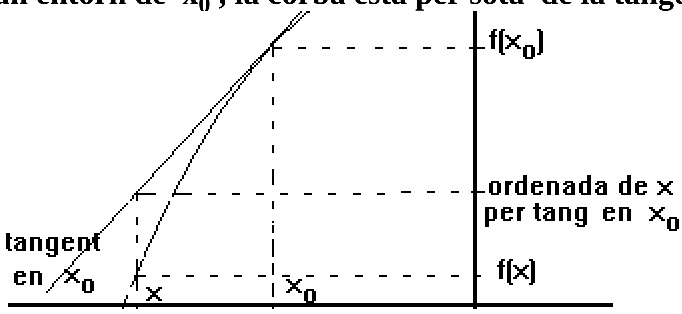
f té la concavitat dirigida cap amunt en x_0 o que f còncava en x_0 $\Leftrightarrow$

- **$\Leftrightarrow$ A un entorn de x_0, la corba està per sobre de la tangent en x_0.**
- **$\Leftrightarrow$ Pels punts propers a x_0 les imatges per la corba són mes grans que les imatges per la tangent en x_0.**
- **$\Leftrightarrow \exists\delta>0$ i $\forall x \,|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \geq$ ordenada de x per la tangent en x_0**
- **$\Leftrightarrow \exists U$ entorn de x_0 i $\forall x \in U$ $f(x) \geq$ ordenada de x per la tangent en x_0**



f és convexa en x_0 $\Leftrightarrow$

- **$\Leftrightarrow \exists\delta>0$ i $\forall x \,|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq$ ordenada de x per la tangent a x_0**
- **$\Leftrightarrow \exists U$ entorn de x_0 i $\forall x \in U$ $f(x) \leq$ ordenada de x per la tangent a x_0**
- **$\Leftrightarrow$ Pels punts propers a x_0 les imatges per la corba són mes petites que les imatges per la tangent en x_0.**
- **$\Leftrightarrow$ A un entorn de x_0, la corba està per sota de la tangent en x_0.**



x_0 és un punt d'inflexió de f $\Leftrightarrow$ en x_0 es produeix un canvi de concavitat.

PROPIETATS.

$f:(a,b) \longrightarrow R$ n cop derivable amb continuïtat en $x_0 \Rightarrow$

$f''(x_0)>0 \Rightarrow$ f còncava en x_0

$f''(x_0)<0 \Rightarrow$ f convexa en x_0

i si $f''(x_0) = 0$ i $f'''(x_0) = .. = f^{n-1)}(x_0) = 0$ i $f^{n)}(x_0) \neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{n parell} \Rightarrow \begin{cases} f^{n)}(x_0) > 0 \Rightarrow \text{f còncava en } x_0 \\ f^{n)}(x_0) < 0 \Rightarrow \text{f convexa en } x_0 \end{cases} \\ \text{n imparell} \Rightarrow x_0 \text{ és punt d'inflexió .} \end{cases}$$

Demostració:

La tangent a la funció en el punt x_0 és la recta $y = f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, anomenarem r(x) a l'ordenada de cada x per aquesta recta .

Si $f''(x_0) \neq 0$, considerem el desenvolupament de Taylor d'aquesta funció en el punt x_0 fins a la 2ª derivada, vàlid en un entorn de x_0 suficientment petit.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 .$$

En aquest cas, la diferència de les ordenades d'un punt per la corba i per la tangent és

$$f(x) - r(x) = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 .$$

Per ser $(x - x_0)^2 > 0 \Rightarrow$ signe de $f(x) - r(x)$ = signe de $f''(x_0) \Rightarrow$

si $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ en un entorn d'x_0 $f(x) - r(x) > 0 \Rightarrow f(x) > r(x) \Rightarrow$ f còncava .

si $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ en un entorn d'x_0 $f(x) - r(x) < 0 \Rightarrow f(x) < r(x) \Rightarrow$ f convexa.

Si $f''(x_0)=0$, trobem les successives derivades en x_0 fins que ens doni diferent de zero:

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \ ... = f^{n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{i} \quad f^{n)}(x_0) \neq 0 .$$

A un entorn suficientment petit de x_0 , la funció f és aproximada pel seu desenvolupament de Taylor, que en aquest cas es redueix a:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

amb el que la diferència d'ordenades entre la corba i la tangent és:

$$f(x) - r(x) = \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Quan n és parell $\Rightarrow (x - x_0)^n > 0 \Rightarrow$ signe de $f(x) - r(x)$ = signe de $f^{n)}(x_0)$ $\Rightarrow$

Si $f^{n)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ en un entorn d'x_0 $f(x) > r(x) \Rightarrow$ f còncava en x_0.

Si $f^{n)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ en un entorn d'x_0 $f(x) < r(x) \Rightarrow$ f convexa en x_0.

Quan n és imparell, el signe de $(x - x_0)^n$, varia segons $x > x_0$ o $x < x_0$ $\Rightarrow$ el signe $f(x) - r(x)$, és diferent segons estiguem a la dreta o l'esquerra de x_0.

$\Rightarrow x_0$ és un punt d'inflexió.

PROPIETAT

f n cops derivable amb continuïtat en punt x_0, es compleix:

x_0 màxim relatiu $\Leftrightarrow$ $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) = ... = f^{n-1)}(x_0) = 0$ i $f^{n)}(x_0) < 0$ i n parell.

x_0 mínim relatiu $\Leftrightarrow$ $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) = ... = f^{n-1)}(x_0) = 0$ i $f^{n)}(x_0) > 0$ i n parell.

x_0 és punt d'inflexió $\Leftrightarrow$ $f''(x_0) = ... = f^{n-1)}(x_0) = 0$ i $f^{n)}(x_0) \neq 0$ i n imparell.

Demostració:

Considerem el desenvolupament de Taylor d'aquesta funció fins a la derivada n (la primera de les que no donen zero):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

(1) $\rightarrow$

Si x_0 és màxim $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$ i $f(x) - f(x_0) \leq 0$ per totes les x d'un cert entorn

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x - x_0) \leq 0$$

Si n fos imparell, a la dreta d'x_0 tindríem un signe, i a l'esquerra un altre.
Per tant, n no pot ser imparell $\Rightarrow$ n parell
i per que sigui negatiu $\Rightarrow$ $f^{n)}(x_0) < 0$.

(1) $\leftarrow$

Si $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) = ... = f^{n-1)}(x_0)=0$ i $f^{n)}(x_0) < 0$ i n parell $\Rightarrow$

a un entorn del punt x_0 $\Rightarrow$ $f(x) = f(x_0) + \dfrac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

amb el que:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Per ser n parell $\Rightarrow$ $(x-x_0)^n \geq 0$ $\Rightarrow$ signe $f(x) - f(x_0)$ = signe $f^{n)}(x_0)$
com $f^{n)}(x_0)<0$ $\Rightarrow$ $f(x) - f(x_0) \leq 0$ $\Rightarrow$ $f(x) \leq f(x_0)$ $\Rightarrow$ x_0 és màxim.

(2) Es demostra de manera semblant que (1) .

(3) $\leftarrow$ És la propietat anterior.
$\rightarrow$ La diferència d'ordenades entre la corba i la tangent en x_0 és:

$$f(x) - r(x) = \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n .$$

x_0 punt d'inflexió $\Rightarrow$ a la dreta d'x_0 hi ha una concavitat i a l'esquerra un altra
$\Rightarrow$ signe $f(x) - r(x)$ varia segons $x > x_0$ o $x < x_0$ $\Rightarrow$ n no pot ser parell $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ n imparell .

REPRESENTACIÓ GRÀFICA DE FUNCIONS.

ASÍMPTOTES.

Les asímptotes a una funció són rectes que donen una idea sobre el comportament de la funció, quan les variables s'apropem a l'infinit.

Donada la corba y= f(x) , direm que un punt $P=(x_0,y_0)$ **s'allunya indefinidament sobre la corba** $\Leftrightarrow$ $|P| \longrightarrow \infty$ $\Leftrightarrow$ P és de la corba $y_0=f(x_0)$ i x_0 i/o y_0 tendeixen a $\pm\infty$.

La recta r és **una asímptota** a y=f(x) $\Leftrightarrow$ $d(P,r) \xrightarrow[|P|\to\infty]{} 0$.

TIPUS I CÀLCUL DE LES ASÍMPTOTES.

Donada la corba y = f(x) diem que:

La recta x = a és una asímptota vertical $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a\pm} f(x) = \pm\infty$ **.**

Observem que les asímptotes verticals, sols poden existir en els punts de discontinuïtat de la funció.

Quan $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, sols hi poden haver asímptotes verticals en els zeros de Q(x).

La recta y = a és una asímptota horitzontal $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ **o** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$ **.**

Es clar que, com a molt, hi ha dues asímptotes horitzontals. Una si anem cap a $+\infty$ i l'altra per a $-\infty$.

Si $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ sols hi ha una única asímptota horitzontal quan grau P(x)≤grau Q(x).

La recta y = mx + n és asímptota obliqua $\Leftrightarrow$

$$\exists\ m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad \exists\ n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)$$

o

$$\exists\ m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad \exists\ n = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx)$$

Observeu que les asímptotes horitzontals són un cas particular de les obliqües, el que correspon a m=0.

Es clar que com a molt hi ha dues asímptotes obliqües, una per $+\infty$ i l'altra per $-\infty$.

Si $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ sols hi ha una única asímptota obliqua quan grau Q(x) = grau P(x)+1.

PARITAT.

Donada la funció y=f(x) diem que:

f és parella $\Leftrightarrow \forall\ x \in$ dom f f(x) = f(-x) $\Leftrightarrow$ f és simètrica respecte l'eix de les Y.

f és senars $\Leftrightarrow \forall\ x \in$ dom f f(x) = -f(-x) $\Leftrightarrow$ f simètrica respecte del punt (0,0) .

Observeu que

- Hi ha funcions que no són ni parelles ni senars.
- Paritat $\Rightarrow$ simetria, però no del revés.

PERIODICITAT.

Una funció y=f(x) és periòdica de període $\pi \neq 0 \Leftrightarrow \forall\ x \in$ dom f $f(x+\pi) = f(x)$.

Observeu que per conèixer una funció periòdica, n'hi ha prou a estudiar-la a un interval de longitud el seu període.

ESTUDI I REPRESENTACIÓ DE FUNCIONS.

L'estudi gràfic d'una funció, és el procés que consisteix a estudiar els trets fonamentals d'una corba amb l'objectiu final de fer-ne la seva representació gràfica.

Sovint, en tindrem prou en fer un esquema senzill del gràfic de la funció i ,sens dubte, no caldrà realitzar tots i cada un dels passos que indicarem.

- Domini de la funció i camps de continuïtat i derivabilitat, recorregut.
- Paritat de la funció per tal de deduir-ne algunes simetries.
- Periodicitat de la funció.
- Asímptotes.
- Interseccions amb els eixos de coordenades.
- Màxims i mínims. Intervals de creixement i decreixement.
- Punts d'inflexió. Intervals de concavitat i convexitat.
- Gràfic de la funció.

Exemple:

Estudi gràfic de la funció $y = \dfrac{x^3}{(1+x)^2}$

Domini:

Per ser un quocient de polinomis, el seu domini coincideix amb el seu camp de continuïtat i el de derivabilitat. Dom = R\{-1} .

Paritat:

com $y(-x) = \dfrac{-x^3}{(1-x)^2}$

$y(-x) \neq y(x) \Rightarrow$ no és parell i $y(-x) \neq -y(x) \Rightarrow$ no és imparell.

Periodicitat:
És clar que no és periòdica, doncs és un quocient de polinomis.
Si ho volem comprovar n'hi ha prou en veure que $y(0+P) = y(0) \Rightarrow P = 0$.

$$y(0+P) = \frac{P^3}{(1+P)^2} \qquad y(0) = 0$$

si fos periòdica $y(0+P) = y(0) \Rightarrow \dfrac{P^3}{(1-P)^2} = 0 \Rightarrow P = 0 \Rightarrow$ no periòdica.

Asímptotes:

- Verticals: L'únic punt de discontinuïtat és el -1, per tant sols cal mirar per x=-1.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3}{(1+x)^2} = \pm\infty \Rightarrow x = -1 \text{ és asímptota vertical.}$$

- Horitzontals: El $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(1+x)^2} = \infty \Rightarrow$ no té asímptota horitzontal
- Obliqües: $\displaystyle m = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x3}{x(1+x)^2} = 1$

$$n = \lim_{x\to\infty} \frac{x3}{(1+x)^2} - 1x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 - 2x^2 - x}{(1+x)^2} = -2$$

per tant la recta $y = x - 2$ és una asímptota obliqua.

Extrems i creixement:

Derivant la funció obtenim: $y' = \dfrac{x^3+3x^2}{(1+x)^3}$

Si fem y ' = 0 per tal de trobar els punts crítics $\Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x^3+3x^2=0 \Rightarrow x^2(x+3)=0 \Rightarrow x = 0$ o $x = -3$.

Els intervals de monotonia ens venen determinats per -3, 0 que són els punts crítics i pel punt de discontinuïtat.

$-10\in]-\infty,-3[$ $\quad y'(-10)>0 \Rightarrow$ y creixent a $]-\infty,-3[$
$-2 \in]-3,-1[$ $\quad y'(-2)<0 \Rightarrow$ y decreixent a $]-3,-1[$
$-0.5\in]-1,0[$ $\quad y'(-0.5)>0 \Rightarrow$ y creixent a $]-1,0[$
$1\in]0,\infty[$ $\quad y'(1)>0 \Rightarrow$ y creixent a $]1,\infty[$.

D'aquí deduïm també que (-3,y(-3)) és un màxim.

Concavitat i punts d'inflexió:

Trobem ara y'' : $\qquad y'' = \dfrac{6x}{(1+x)^4}$

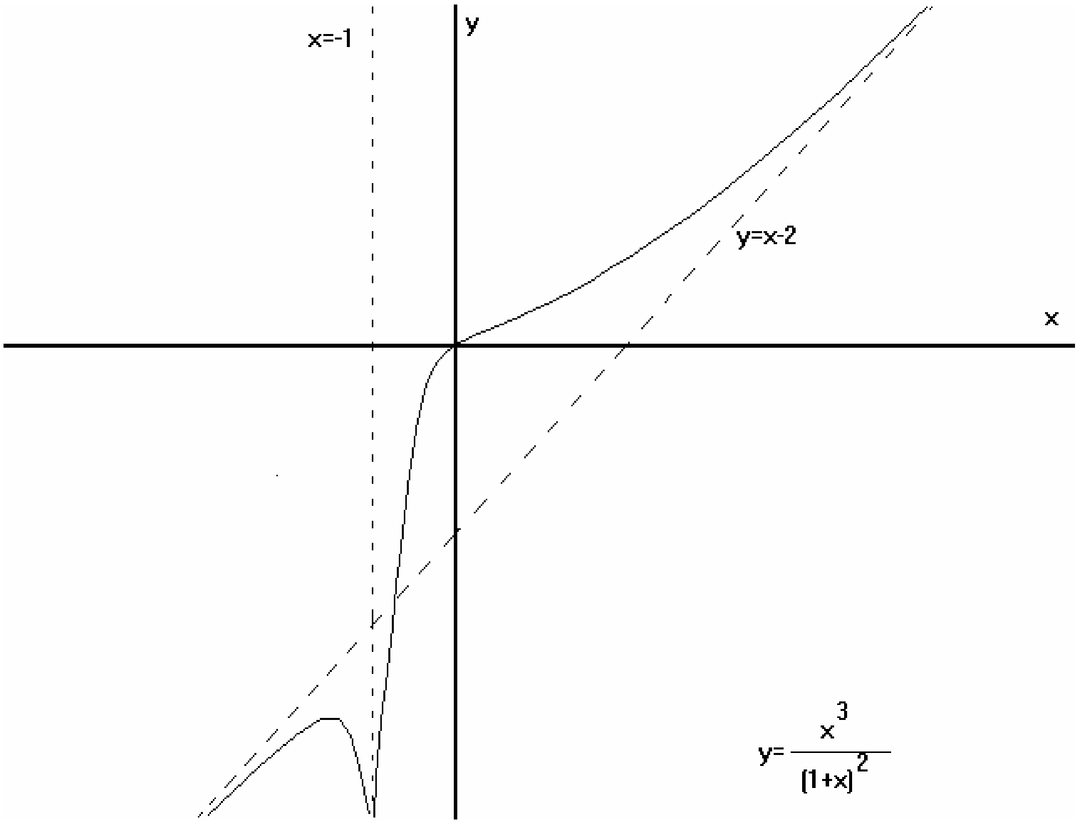
Si $y'' = 0 \Rightarrow x = 0$.

Els intervals de concavitat venen determinats pel zero de la segona derivada i pel punt de discontinuïtat:

$-10 \in]-\infty,-1[$ $\quad y''(-10)<0 \Rightarrow y \cap$ a $]-\infty,-1[$
$-0.5 \in]-1,0[$ $\quad y''(-0.5)<0 \Rightarrow y \cap$ a $]-1,0[$
$1 \in]0,\infty[$ $\quad y''(1)<0 \Rightarrow y \cup$ a $]0,\infty[$

D'aquí deduïm que el (0,y(0)) és un punt d'inflexió.

Finalment, construïm el **gràfic**:



PROBLEMES DE MÀXIMS I MÍNIMS.

Els "problemes de màxims i mínims" són aquells problemes en què cal trobar, si hi són, els valors de les variables que aconsegueixen fer màxima o mínima una característica determinada.

El procediment general de resolució d'aquests problemes és el següent:

S'expressa la característica a optimitzar, com a funció de varies variables: F(x,y,z,t...).

Es troben els lligams entre les variables, que ens permeten obtenir cada una d'aquestes a partir d'una de sola. y=y(x) , z=z(x), t=t(x),... .

Aconseguim així expressar la característica a optimitzar com a funció d'una sola variable:

F(x,y,z,t,...)=F(x,y(x),z(x),t(x),...)=F(x).

Calculem els punts crítics de F(x), solucionant l'equació F '(x)=0 $\Rightarrow x_0, x_1, \ldots x_n$ punts crítics.

Esbrinem quins d'aquests punts són extrems per qualsevol dels mètodes coneguts: signe F", estudi del creixement de F, realització de petites variacions als valors x_j.

Escollim els valors x_j que s'ajustin a l'enunciat i determinem quins són els valors de les altres variables.

Exemple:
Trobeu dos números que sumin 28 i que el seu producte sigui màxim.

Si anomenem x i y a aquest dos números, és clar que cal optimitzar la funció P = xy.

Ara bé, l'enunciat diu que x i y sumen 28 $\Rightarrow$ x + y = 28 $\Rightarrow$ y = 28 - x.

Substituint a la funció a optimitzar s'obté: P = x(28-x) = 28x-x2, funció que sols depèn d'una variable.

Trobem ara els punts crítics de P. P ' = 28 - 2x $\Rightarrow$ P'=0 $\Rightarrow$ 28 - 2x = 0 $\Rightarrow$ x = 14.

Com P "= -2 $\Rightarrow$ P "(14)<0 $\Rightarrow$ x = 14 és un màxim de P.

Finalment calculem la y que li correspon: y = 28 - x $\Rightarrow$ y = 28 - 14 = 14.

Per tant, els números buscats són: x = 14 i y = 14 .